MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ŞI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Şpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a 8-a

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova (nr. 838 din 14 august 2013). Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul .... Manualul nr.				
Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului care a primit manualul	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Comisia de evaluare:
Valeriu Baltag, doctor în ştiinţe fizico-matematice, profesor, grad didactic superior, Liceul Academiei de Ştiinţe a Moldovei
Dumitru Cozma, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar, UST
Victor Iavorschi, profesor, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Constantin Stere”, or. Soroca
Lidia Bezniţchi, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic Lăpuşna, r-nul Hânceşti

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferenţiar universitar, USM
Andrei Braicov, doctor, conferenţiar universitar, UST
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, or. Chişinău

Redactor: *Andrei Braicov*
Corector: *Fulga Poiată*
Copertă: *Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internaţional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: office@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Achiri, Ion

Matematică: Manual pentru clasa a VIII-a / Ion Achiri, Andrei Braicov, Olga Şpuntenco; comisia de evaluare: Valeriu Baltag [et al.]; Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova. – Chişinău: *Prut Internaţional*, 2019 (F.E.-P. „Tipografia Centrală”). – 224 p.

ISBN 978-9975-54-416-0

51(075.3)
A 16

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 7209

ALGEBRĂ

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

capitolul 1
Recapitulare și completări

§1. Mulțimea numerelor reale și submulțimi ale ei

1.1. Numere reale. Forme de reprezentare

Ne amintim

1 Selectați numerele care se potrivesc cutiei ①, apoi, din cele rămase, selectați numerele care se potrivesc cutiei ②. Din numerele rămase, selectați numerele potrivite cutiei ③. Corespund cutiei ④ numerele neselectate?

- De ce pentru cutia ⑤ n-au mai rămas numere?
- Cum se numesc numerele care nu sunt raționale?

① ② ③ ④ ⑤

$\sqrt{9}$ $\frac{\sqrt{11}}{11}$ 0 $7\sqrt{2}$ $6\frac{1}{3}$ -2 $-\frac{1}{9}$

$4{,}1(8)$ $9{,}(2)$ $-\frac{1}{8}$ $\sqrt{3}$ $0{,}123\ldots$ $-2\sqrt{7}$

$-3\sqrt{3}$ 10 $\frac{2}{5}$ -74 3 216

- Vom obține același rezultat dacă vom selecta mai întâi numerele care se potrivesc cutiei ⑤? De ce?

• În ce ordine trebuie selectate numerele, astfel încât cutiile ① și ③ să rămână goale?

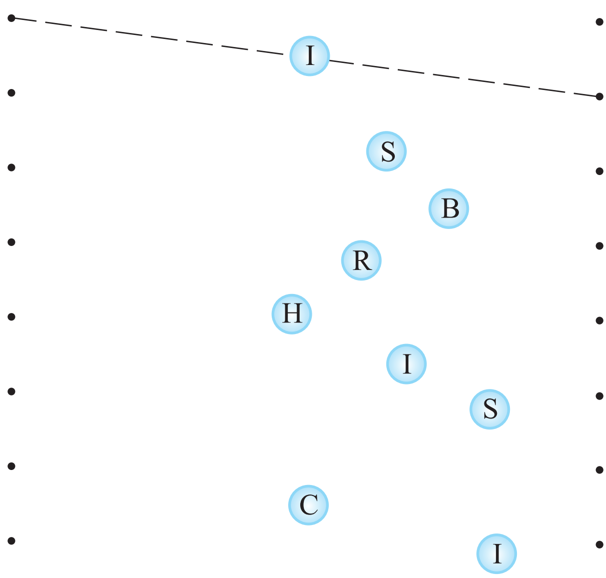
• Care dintre numerele date au perioadă simplă? Dar perioadă mixtă?

Generalizăm

- Un număr real este rațional sau este irațional.
- Un număr rațional poate fi scris sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Un număr irațional nu poate fi scris sub formă de fracție.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

2 Stabiliți corespondențe. Folosind rigla, aflați ce literă va intersecta fiecare segment-corespondență. Descoperiți pe verticală numele unui ilustru matematician din Republica Moldova, care a activat în secolul al XX-lea.

	Mulțimea numerelor:	
$\mathbb{Z}^*$	naturale nenule	
$\mathbb{R}_-$	întregi nenule	I
$\mathbb{Q}_+^*$	întregi nepozitive	
$\mathbb{R}_-^*$	raționale nepozitive	
$\mathbb{Z}_-$	raționale pozitive	
$\mathbb{N}^*$	iraționale negative	
$\mathbb{I}_-$	reale nenegative	
$\mathbb{R}_+$	reale nepozitive	
$\mathbb{Q}_-$	reale negative	



Generalizăm

Fie M o mulțime de numere. Se notează: $M^* = M \setminus \{0\}$;

M_+ – mulțimea numerelor nenegative din M;

M_+^* – mulțimea numerelor pozitive din M;

M_- – mulțimea numerelor nepozitive din M;

M_-^* – mulțimea numerelor negative din M.

3 Observați modelul și scrieți sub formă zecimală numerele reprezentate sub formă de fracție. Scrieți celelalte numere (dacă este posibil) sub formă de fracție:

a) $1\frac{2}{9}$; $-\frac{12}{13}$; $4{,}8$; $6{,}(7)$; $-5{,}1(4)$; $\sqrt{8}$; $1{,}1234\ldots$;

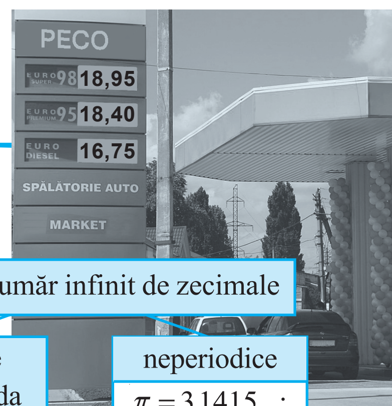
b) $\frac{4}{7}$; $-1\frac{3}{4}$; $5{,}7$; $0{,}1(234)$; $-\sqrt{2}$; $3{,}5(1)$; $2{,}122333\ldots$

Model:

- $2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{13}{5}=13:5=2{,}6$;
- $-\frac{4}{11}=-0{,}3636\ldots=-0,(36)$;
- $3{,}7=3\frac{7}{10}$;
- $8,(15)=8\frac{15}{99}=8\frac{5}{33}$;
- $6{,}9(23)=6\frac{923-9}{990}=6\frac{914}{990}=6\frac{457}{495}$.

Generalizăm

Cum orice număr real este rațional sau irațional, el poate fi reprezentat:
- ca număr zecimal cu un număr finit de zecimale sau ca
- număr zecimal cu un număr infinit de zecimale, cu perioadă simplă, sau ca
- număr zecimal cu un număr infinit de zecimale, cu perioadă mixtă, sau ca
- număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale.



Numere zecimale
- cu un număr finit de zecimale (sau cu un număr infinit de zerouri): 0,1; –0,21; 14,25; –7,5000...
- cu un număr infinit de zecimale
  - periodice (cu perioada diferită de 0)
    - simple: $0,(3)$; $-6,(12)$
    - mixte: $4{,}6(7)$; $-0{,}1(51)$
  - neperiodice: $\pi=3{,}1415\ldots$; $0{,}112113114\ldots$

1.2. Aproximări și rotunjiri ale numerelor reale

1 Ne amintim cum se calculează aproximările și rotunjirile numerelor reale:

- **Aproximarea prin lipsă cu o zecime** (**ALZ**) a numărului **pozitiv** a este numărul obținut după înlăturarea tuturor cifrelor de ordin mai mic decât ordinul zecimilor numărului a.

  Exemple: $\text{ALZ}(5{,}27)\approx 5{,}2$, $\text{ALZ}(3{,}12)\approx 3{,}1$.

- **Aproximarea prin adaos cu o zecime (AAZ)** a numărului **pozitiv *a*** este numărul cu 0,1 mai mare decât aproximarea prin lipsă cu o zecime a numărului a: $\text{AAZ} = \text{ALZ} + 0{,}1$.

  Exemple: $\text{AAZ}(5{,}27) \approx 5{,}3$, $\text{AAZ}(3{,}12) \approx 3{,}2$.

- **Aproximarea prin lipsă (prin adaos)** a numărului negativ a este egală cu opusul aproximării prin adaos (prin lipsă) a numărului $|a|$.

  Exemple: $\text{ALZ}(-5{,}27) \approx -5{,}3$, $\text{ALZ}(-3{,}12) \approx -3{,}2$, $\text{AAZ}(-5{,}27) \approx -5{,}2$.

- **Rotunjirea până la zecimi (RZ)** a numărului real a este una dintre aproximările ALZ, AAZ ale lui a, situată pe axă cel mai aproape de a. Dacă numărul a este mijlocul intervalului [ALZ, AAZ], atunci rotunjirea până la zecimi a numărului a este AAZ.

  Exemple:

$\text{ALZ}(3{,}16) \approx 3{,}1$	$\text{ALZ}(-3{,}16) \approx -3{,}2$	$\text{ALZ}(7{,}25) = 7{,}2$	$\text{ALZ}(-7{,}25) = -7{,}3$
$\text{AAZ}(3{,}16) \approx 3{,}2$	$\text{AAZ}(-3{,}16) \approx -3{,}1$	$\text{AAZ}(7{,}25) = 7{,}3$	$\text{AAZ}(-7{,}25) = -7{,}2$
$\text{RZ}(3{,}16) \approx 3{,}2$	$\text{RZ}(-3{,}16) \approx -3{,}1$	$\text{RZ}(7{,}25) = 7{,}3$	$\text{RZ}(-7{,}25) = -7{,}2$

***Observații.* 1.** Aproximările unui număr cu o unitate, o sutime, o miime etc. și rotunjirile până la unități, sutimi, miimi etc. ale unui număr se definesc în mod analog definițiilor aproximărilor numărului cu o zecime și rotunjirii lui până la zecimi.

2. Fie a un număr real (pozitiv sau negativ). Atunci $\text{ALZ} \le a \le \text{AAZ}$.

3. Rotunjirea până la zecimi (RZ) a numărului pozitiv a este egală cu aproximarea prin lipsă până la zecimi a numărului a în cazul în care cifra sutimilor numărului a este 0, 1, 2, 3 sau 4. Dacă cifra sutimilor numărului a este 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci RZ a numărului a este egală cu aproximarea prin adaos cu o zecime a numărului a.

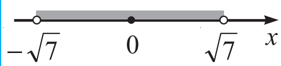
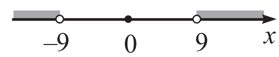
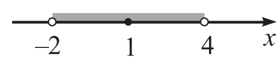
$$\text{RZ} = \begin{cases} \text{ALZ}, \text{ dacă } c \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \text{AAZ}, \text{ dacă } c \in \{5, 6, 7, 8, 9\}, \end{cases}$$ unde c este cifra sutimilor numărului a.

• Observați aproximările și rotunjirile numerelor din tabel și completați similar:

	Aproximarea prin lipsă cu o			Aproximarea prin adaos cu o			Rotunjirea până la		
Numărul	unitate	zecime	sutime	unitate	zecime	sutime	unități	zecimi	sutimi
2,735	2	2,7	2,73	3	2,8	2,74	3	2,7	2,74
–2,735	–3	–2,8	–2,74	–2	–2,7	–2,73	–3	–2,7	–2,73
$\sqrt{5}$									
$-\sqrt{5}$									
–0,(12)									

1.3. Modulul unui număr real. Aplicații

1 Observați și completați:

Mulțimea M a numerelor reale x	Reprezentarea mulțimii M pe axa numerelor	Distanțele dintre punctele de coordonata x și	Obținerea formei reprezentării analitice a mulțimii M
mai mici decât $\sqrt{7}$ și mai mari decât $-\sqrt{7}$		originea axei sunt mai mici decât $\sqrt{7}$	$-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ $M = \{x \mid \lvert x\rvert < \sqrt{7}\}$
mai mari decât 9 sau mai mici decât –9		originea axei sunt mai $\square$ decât 9	$x > 9$ sau $x < -9$ $M = \{x \mid \lvert x\rvert > \square\}$
?		punctul de coordonata 1 sunt mai mici decât 3	$-2 < x < 4$ $-2-1 < x-1 < 4-1$ $-3 < x-1 < 3$ $M = \{x \mid \lvert x-1\rvert < \square\}$
mai mari decât 3 sau mai mici decât –7	?	punctul de coordonata –2 sunt mai mari decât 5	$x > 3$ sau $x < -7$ $\Rightarrow x-(-2) > 3-(-2)$ sau $x-(-2) < -7-(-2)$ $\Rightarrow x+2 > \square$ sau $x+2 < \square$ $M = \{x \mid \lvert x+2\rvert > \square\}$

Fie a un număr real.

Definiție. Modulul numărului real a (sau **valoarea absolută** a numărului a) se notează prin $|a|$ și se definește astfel: $|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$

- Distanța de la punctul $A(a)$ până la originea axei numerelor este egală cu $|a|$.

Proprietăți ale modulului

Pentru orice numere reale a și b:

$1°\ |a| \geq 0;$

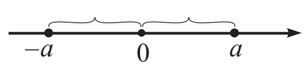
$2°\ |a| \geq a;$

$3°\ |a^2| = |a|^2 = a^2;$

$4°\ |ab| = |a| \cdot |b|;$

$5°\ \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|},\ b \neq 0.$

- Numerele a și $-a$ se numesc **numere opuse**.



2 Explicitați modulul, selectând expresia potrivită din parantezele pătrate:

a) $|\sqrt{3}-5| = [\sqrt{3}-5 \text{ sau } 5-\sqrt{3}]$;

b) $|\sqrt{0{,}1}-0{,}1| = [\sqrt{0{,}1}-0{,}1 \text{ sau } 0{,}1-\sqrt{0{,}1}]$;

c) $|x-2| = [x-2 \text{ sau } 2-x]$ pentru $x<2$;

d) $|4-x| = [4-x \text{ sau } x-4]$ pentru $x>4$.

Aplicați proprietatea 1°.

1.4. Compararea numerelor reale

1 Comparați numerele a şi b, dacă:

a) $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $|a|>|b|$;

b) $a, b \in \mathbb{R}_-$ şi $|a|>|b|$;

c) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ şi $|a|>|b|$;

d) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ şi $|a|>|b|$;

e) numărul a reprezentat pe axa numerelor se află la dreapta numărului b.

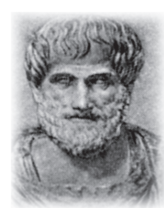
Generalizăm

Fie a şi b două numere reale.

Dacă:	atunci
a) numărul a se află pe axa numerelor la stânga numărului b, b) numerele a şi b sunt pozitive şi $\|a\|<\|b\|$, c) numerele a şi b sunt negative şi $\|a\|>\|b\|$, d) numărul a este negativ, iar b – nenegativ,	$a<b$.

2 Ordonați crescător numerele şi veți afla numele unui filosof ilustru din Antichitate.

T	L	S	R	T	A	O	I	E
$-\frac{1}{4}$	$1{,}4$	$-1{,}43$	$-1{,}443$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1{,}(4)$	$-0{,}4$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$



Exerciții și probleme

1

1. În care buzunăraş poate fi amplasat numărul:

88; $-3{,}(6)$; $5\frac{1}{6}$; $-\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; 0;

-2008; $17{,}25$; $-2{,}7$; $3\sqrt{41}$; $\sqrt{9}$;

$-\sqrt{25}$; $1{,}2(4)$?

$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Z}_-$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}_-$	$\mathbb{Z}_+^*$
$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}_+$

2. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{I}_-$; c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_-$;
d) $\mathbb{R}^*_+ \subset \mathbb{R}$; e) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$; f) $\mathbb{Q}_- \not\subset \mathbb{R}$;
g) $\mathbb{Z}^*_+ \subset \mathbb{Z}$; h) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}_+$.

3. Completați adecvat:

a) $\square \in \mathbb{N}$; b) $\square \in \mathbb{Z}_+$; c) $\square \in \mathbb{R}_-$; d) $\square \in \mathbf{I}_+$;
e) $\square \in \mathbb{Q}^*_-$; f) $\square \in \mathbb{R}^*_+$; g) $\square \in \mathbb{Z}^*$; h) $\square \in \mathbb{R}^*$.

4. Folosiți calculatorul de buzunar şi completați tabelul:

Numărul real	Aproximarea	prin lipsă	prin adaos
12,127	cu o zecime		
$-\sqrt{8}$	cu o sutime		
7,1(68)	cu o miime		
$-3\frac{2}{3}$	cu o milionime		
$\sqrt{13}$	cu o sutime de miime		

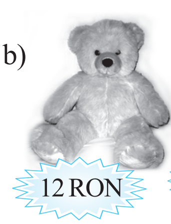
5. Utilizând calculatorul de buzunar, rotunjiți numărul până la: 1) zecimi; 2) sutimi; 3) miimi:

a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{27}$; c) $\sqrt{41}$; d) $\sqrt{19}$; e) $\sqrt{135}$; f) $\sqrt{226}$.

6. Care produs este mai ieftin?

Cursul valutar	
1 \$	12,40 lei
1 €	16,50 lei
1 RON	3,60 lei
1 UAH	1,52 lei

a)


b)


c)


d)


7. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $\sqrt{15} > 1 + \sqrt{14}$; b) $3 - \sqrt{2} > \sqrt{7}$;
c) $\sqrt{121} < 11$; d) $\sqrt{400} > 20$;
e) $\sqrt{17} < \sqrt{25}$; f) $\sqrt{625} = 25$.

Indicație. Utilizați calculatorul de buzunar.

8. Reprezentați pe axă numărul real a şi opusul său, dacă a este egal cu:

a) 2,5; b) $-3\frac{1}{4}$; c) $\sqrt{9}$; d) $\sqrt{11}$; e) $-\sqrt{26}$; f) 5,(6).

9. Aflați modulul numărului:

a) $-7\frac{4}{5}$; b) $\sqrt{36}$; c) 18,3(56); d) $-5{,}48$; e) $8\frac{1}{3}$; f) $\sqrt{22}$.

10. Ordonați crescător numerele:

$\sqrt{9}$; $|-6,(2)|$; $-\sqrt{20}$; 3,27; $-4{,}5$; $|4{,}28|$; 7; -1.

11. Ordonați descrescător numerele:

$|-3{,}5|$; $\sqrt{15}$; $-3{,}6$; $|\sqrt{16}|$; $-\frac{21}{6}$; 12; $-5\frac{4}{5}$; 2,(46).

2

12. Completați adecvat:

a) $\mathbb{R}\cap\mathbb{Z}=\square$; b) $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}_-=\square$; c) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{I}_+=\square$;

d) $\mathbb{Q}_+\cup\mathbb{Q}_-=\square$; e) $\mathbb{Z}_+\cap\mathbb{N}=\square$; f) $\mathbb{R}_-\cap\mathbb{R}_+=\square$.

13. Scrieți numerele opuse care se află pe axă unul față de altul la distanța de:

a) $3\frac{1}{2}$; b) $2\sqrt{14}$; c) 6,(4); d) $4+\sqrt{10}$.

14. Explicitați modulul:

a) $|\sqrt{19}-4|$; b) $|2-\sqrt{10}|$; c) $|\sqrt{7}-2\sqrt{2}|$; d) $|\sqrt{22}-3\sqrt{2}|$.

15. Explicitați modulul:

a) $|x-2|$; b) $|1-x|$; c) $|3x-6|$; d) $|10-5x|$.

Model:

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geq 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$$

16. Calculați:

a) $|\sqrt{5}\cdot(6-8{,}15)|+|(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2|-\left|\frac{1-\sqrt{5}}{5-6{,}5}\right|$;

b) $|(3-2\sqrt{2})^2|-|(\sqrt{2}\cdot(8-12{,}44)|+\left|\frac{\sqrt{2}-5}{2-3,(6)}\right|$.

17. 1) Reprezentați pe axă numerele reale:

a) mai mari decât $-1\frac{2}{5}$ şi mai mici decât $\sqrt{4}$;

b) mai mici decât $-\sqrt{9}$ sau mai mari decât $\sqrt{9}$;

c) cuprinse între $-6{,}5$ şi $\sqrt{10}$;

d) cuprinse între $-\sqrt{23}$ şi $\sqrt{23}$;

e) mai mici decât $\sqrt{25}$ şi mai mari decât -2;

f) mai mari decât $\sqrt{5}$ sau mai mici decât $\sqrt{2}$.

2) Scrieți analitic mulțimile numerelor exercițiilor a)–f).

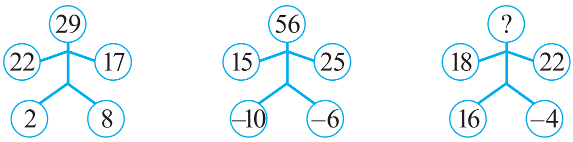
18. Comparați:

a) 20 \$ ⬤ 15 €; b) 12 RON ⬤ 6 \$;

c) 250 UAH ⬤ 150 \$; d) 25,5 € ⬤ 810 RON.

Cursul valutar	
1 \$	12,40 lei
1 €	16,50 lei
1 RON	3,60 lei
1 UAH	1,52 lei

19. Determinați numărul care lipsește.



3

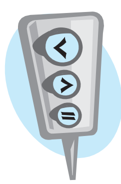
20. Demonstrați identitatea:

a) $\sqrt{t^4+2t^2+1}=t^2+1$; b) $\sqrt{x^2+2|x|+1}=|x|+1$.

21. Construiți cu rigla și compasul pe caiet un segment cu lungimea de:

a) $\sqrt{10}$ cm; b) $\sqrt{8}$ cm; c) $\sqrt{6{,}5}$ cm; d) $\sqrt{2{,}5}$ cm.

22. Comparați:



a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ⬤ $\sqrt{2}-1$;

b) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ⬤ $\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

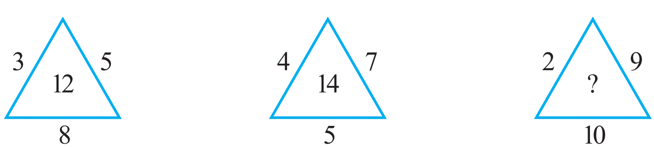
c) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ ⬤ $\sqrt{7}+1$;

d) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$ ⬤ $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

23. Aflați valorile întregi ale variabilelor a şi b, astfel încât $a^2+b^2-8a+10b+41=0$.

Indicație. Aplicați formulele $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ şi $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

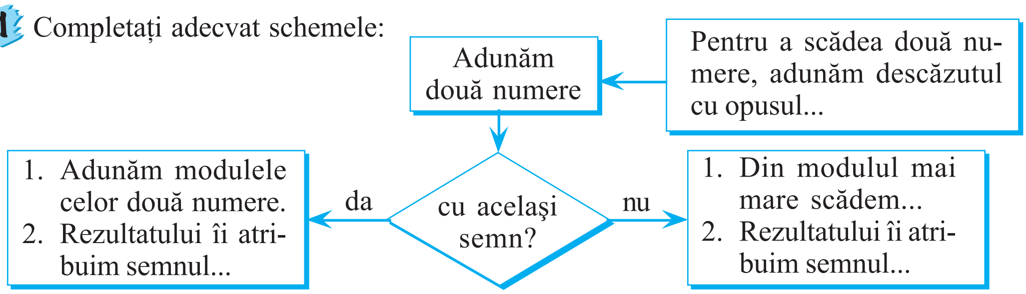
24. Determinați numărul care lipsește.

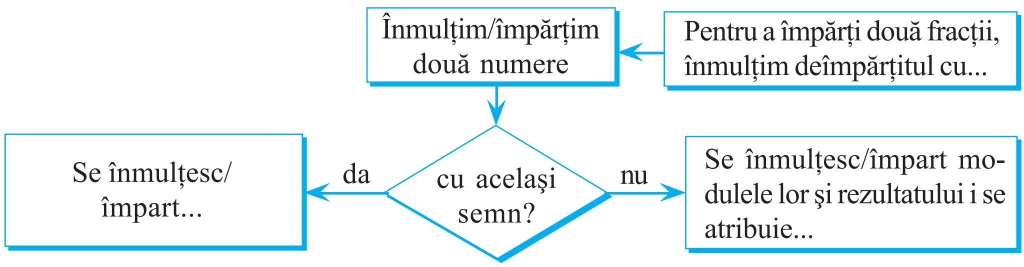


§2. Operații aritmetice cu numere reale. Operații cu intervale de numere reale

2.1. Operații aritmetice cu numere reale

1 Completați adecvat schemele:





• Calculați, rotunjind până la sutimi, și numiți regula aplicată la efectuarea fiecărei operații aritmetice:

a) $-4{,}75+3{,}25+\sqrt{6}(2-\sqrt{6}):\left(-\frac{2}{3}\right)$;   b) $3{,}5\cdot(-\sqrt{5})+8\sqrt{5}:2-3\sqrt{5}\cdot 2{,}(3)$.

2 Completați astfel încât să obțineți ***proprietățile operațiilor aritmetice cu numere reale***.

Pentru orice numere reale a, b, c:

______ și ______ sunt operații **comutative**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
______ și ______ sunt operații **asociative**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(ab)\cdot c$
Pentru operația de ______ 0 este **element neutru**.	$a+0=0+a=a$
Pentru operația de ______ 1 este **element neutru**.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Fiecare număr real a are un unic ______, $-a$.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Fiecare număr real nenul a are un unic ______, $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0.$
Înmulțirea este ______ față de adunare și față de scădere.	$a\cdot(b+c)=ab+ac$ $a(b-c)=ab-ac$

3 Poate suma a două numere iraționale să fie un număr rațional? Dar diferența? Produsul? Câtul?

***Explicăm prin exemple*:**

Numărul irațional a	Numărul irațional b	Rezultatul operației aritmetice
$4-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Suma numerelor a și b: $(4-\sqrt{3})+\sqrt{3}=4\in\mathbb{Q}$;
$4-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	Diferența numerelor a și b: $(4-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})=\square$;
$4-\sqrt{3}$	$4+\sqrt{3}$	Produsul numerelor a și b: $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=4^2-(\sqrt{3})^2=\square$;
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Câtul numerelor a și b: $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\square$.

Răspuns: $\square$.

4 Stabiliți ordinea efectuării operațiilor și calculați valoarea expresiei:

$$\sqrt{15}\overset{\bigcirc}{-}[7\sqrt{3}\overset{⑤}{\cdot}(-5\sqrt{5})\overset{\bigcirc}{+}5^{\overset{③}{2}}\overset{\bigcirc}{\cdot}(7\sqrt{15}\overset{\bigcirc}{-}\sqrt{5}\overset{①}{\cdot}9\sqrt{3})]\overset{⑦}{:}57.$$

Rezolvăm

① $\sqrt{5}\cdot 9\sqrt{3}=9\sqrt{15}$;

② $7\sqrt{15}-9\sqrt{15}=\square$;

③ $5^2=\square$;

④ $\square\cdot\square=\square$;

⑤ $7\sqrt{3}\cdot(-5\sqrt{5})=\square$;

⑥ $\square+\square=\square$;

⑦ $\square:\square=\square$;

⑧ $\sqrt{15}-\square=\square$.

Ne amintim

Ordinea efectuării operațiilor

1. Operațiile din paranteze (interioare, apoi exterioare)
2. Ridicarea la putere, extragerea rădăcinii pătrate
3. Înmulțirea și împărțirea
4. Adunarea și scăderea

2.2. Operații cu intervale de numere reale

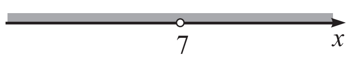
1 Se știe că numărul real x aparține porțiunii colorate. Folosind intervalele, scrieți mulțimea căreia îi aparține x:

a) 

b) 

c) 

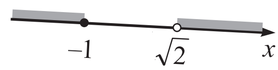
d) 

e) 

Model:

$x \in [-2;\ 3)$

$x \in (1{,}4;\ +\infty)$



$x \in (-\infty;\ -1] \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$

• Citiți fiecare interval obținut.

2 Observați modelul din primul rând al tabelului și completați similar $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$:

Mulțimea	Intervalul numeric	
	Reprezentarea pe axă	Notarea
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$		$[a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	?	?
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	?	?
?	?	(a, b)
?		?
?		$[a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	?	?
?	?	$(-\infty, b]$
$\mathbb{R}$	?	$(-\infty, +\infty)$

3 Observați modelul și aflați reuniunea și intersecția intervalelor:

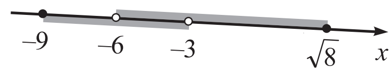
a) $(-8;\ 7]$ și $(-3;\ 8)$;

b) $(-\infty;\ \sqrt{5})$ și $(-\infty;\ -\sqrt{6})$;

c) $(1;\ +\infty)$ și $[-5;\ 4)$;

d) $[-2;\ \sqrt{10}]$ și $[-\sqrt{10};\ +\infty)$.

Model:



$(-6;\ \sqrt{8}] \cup [-9;\ -3) = [-9;\ \sqrt{8}]$;

$(-6;\ \sqrt{8}] \cap [-9;\ -3) = (-6;\ -3)$.

Exerciții și probleme

1

1. Tata a cumpărat de la piață 3 kg de cartofi la prețul de 4,5 lei/kg, 1 kg de morcovi la prețul de 7,3 lei, 2,5 kg de sfeclă la prețul de 5,2 lei/kg și un pepene verde de 4,5 kg la prețul de 5,5 lei/kg. Au fost suficienți 60 de lei pentru a achita cumpărăturile? Au mai rămas bani? Câți?

2. Fie numerele: a) 0,225; b) 642; c) 1 035; d) 705; e) 208; f) 350; g) 14,4; h) 2013.
Indicați care dintre aceste numere:
1) sunt divizibile cu 2; 2) sunt divizibile cu 2 şi cu 5;
3) sunt divizibile cu 3; 4) sunt divizibile cu 9;
5) sunt divizibile cu 2 şi cu 3; 6) sunt divizibile cu 3 şi cu 9.

3. Calculați, aflând cel mai mare divizor comun al numitorilor fracțiilor:
a) $\frac{25}{336}+\frac{2}{135}$; b) $\frac{3}{345}-\frac{7}{546}$; c) $\frac{1}{2013}+\frac{1}{2016}$.

4. Se dau numerele 108 şi 54.
a) Aflați D_{108}, D_{54}. b) Scrieți câte cinci elemente ale mulțimilor M_{108}, M_{54}.
c) Aflați c.m.m.d.c. al numerelor 108 şi 54. d) Determinați c.m.m.m.c. al numerelor 108 şi 54.

5. Calculați:
a) $3,75-2:0,25+1,4\cdot 3,55+1,2^3$;
b) $6,24:0,4+7,65\cdot 20-1000\cdot 0,01\cdot 5^2$;
c) $3\frac{1}{4}\cdot 2\frac{5}{8}-15\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}+6,(2)\cdot\frac{9}{23}-11^2\cdot 10^2$;
d) $4,1(15)\cdot 99-13,(12)\cdot 100^2+16,0(21)\cdot 10000$.

6. Calculați, rotunjind rădăcina pătrată până la sutimi (utilizând calculatorul de buzunar):
a) $\sqrt{625}-\sqrt{14}$; b) $2\sqrt{7}+0,3\sqrt{13}$; c) $\pi-\sqrt{19}$;
d) $(-\sqrt{11})\cdot\sqrt{21}$; e) $(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{16})$; f) $3\sqrt{2}\cdot(-1,5\sqrt{7})$.

7. Utilizând calculatorul din imagine, valoarea expresiei $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ se calculează conform următorului algoritm:

a $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{M+}}$ b $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{MR}}$

a) Scrieți algoritmul după care se calculează valoarea acestei expresii, utilizând calculatorul.
b) Calculați valoarea expresiei $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, dacă $a=6,8$, $b=8,3$, rotunjind rezultatul până la sutimi.

8. Utilizând calculatorul din imagine, valoarea expresiei $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ se calculează conform următorului algoritm:

b $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{X}}$ a $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$ d $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{X}}$ c $\boxed{\text{M-}}$ $\boxed{\text{MR}}$

a) Scrieți algoritmul după care se calculează valoarea acestei expresii, utilizând propriul calculator.

b) Calculați valoarea expresiei $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$, dacă $a=1{,}25$, $b=2{,}5$, $c=0{,}54$, $d=4{,}4$, rotunjind rezultatul până la zecimi.

9. Calculați media aritmetică a numerelor reale a şi b, dacă:

a) $a=1{,}25:0{,}05-2\sqrt{7}\cdot(-2{,}5-4{,}8)$,

$b=5\sqrt{7}\cdot(-2{,}4)+6{,}24:(0{,}04-0{,}24)$;

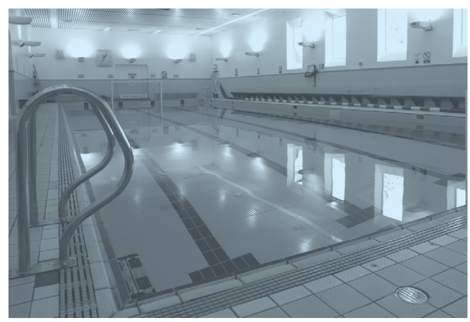
b) $a=3\sqrt{5}[4,(2)-1{,}44\cdot 0{,}05]+\left(-3\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)$,

$b=3,(25)-4[-2{,}1(15)-7:(-33)]+7\sqrt{5}$.

10. Aflați numerele întregi consecutive între care este cuprins numărul real:

a) $-3+\sqrt{7}$; b) $1+\sqrt{6}$; c) $(-1{,}5)\cdot(-\sqrt{14})$; d) $-7,(2)\sqrt{10}$.

11. ***Activitate în perechi.*** Măsurați lățimea şi lungimea suprafeței băncii şi calculați câți metri pătrați de hârtie sunt necesari pentru a o acoperi.



12. O piscină are dimensiunile de 10,5 m × 25 m × 3,2 m. De câte plăci de faianță este nevoie pentru a acoperi pereții şi fundul piscinei, dacă o placă de faianță are dimensiunile de 25 cm şi 40 cm?

13. Scrieți opusul, apoi inversul numărului:

a) $-\frac{2}{5}$; b) $2\frac{1}{4}$; c) $\sqrt{7}$;

d) $-2\sqrt{26}$; e) $1-\sqrt{3}$; f) $2+\sqrt{5}$.

14. Citiți intervalul de numere:

a) $(-\infty;\ 1]$; b) $(-\infty;\ -4{,}5)$; c) $(\sqrt{7};\ +\infty)$; d) $[-\sqrt{6};\ +\infty)$;

e) $(-7\frac{2}{5};\ 0)$; f) $[3\sqrt{5};\ 78]$; g) $[-\sqrt{11};\ 4)$; h) $(-2{,}5;\ \sqrt{2}]$.

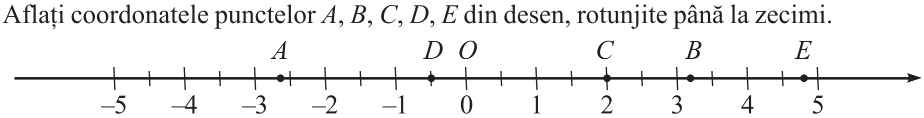
15. Utilizând axa numerelor, aflați reuniunea şi intersecția intervalelor:

a) $[-4{,}5;\ 2)$ şi $(0;\ \sqrt{5})$; b) $(-\infty;\ 3{,}7)$ şi $(-2;\ +\infty)$;

c) $(-\infty;\ 3{,}7)$ şi $(-2;\ +\infty)$; d) $(\sqrt{7};\ 15]$ şi $[15;\ 2013)$.

2

16. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, D, E din desen, rotunjite până la zecimi.



17. Scrieți numărul 7 ca produs de două:

a) numere întregi; b) numere raționale;

c) numere iraționale egale; d) numere iraționale diferite.

18. Aria suprafeței Pământului este de 510,1 milioane km², dintre care 149,2 milioane km² reprezintă uscatul.
a) Aflați aria suprafeței Pământului acoperită cu apă. Exprimați rezultatul în metri pătrați.
b) Ce procent din toată suprafața Pământului reprezintă apa? Dar uscatul?

19. Masa Pământului este de $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Aflați masa Planetei Venus, dacă ea constituie $\frac{4}{5}$ din masa Pământului.

20. Anual, populația de pe Terra crește în medie cu 2%.
a) Câți locuitori vor fi pe glob în anul 2050, dacă în 1990 populația Terrei a constituit 5,2 miliarde?
b) Câți locuitori vor fi pe Terra în 2022?

21. Rezolvați problema, rotunjind răspunsul până la întregi.
Sergiu are 9 ani. Vârsta fiecăreia dintre surorile lui gemene, Alisia și Amelia, constituie 22% din vârsta lui Sergiu, iar vârsta verișorului său Maxim constituie 30% din vârsta acestuia. Aflați peste câți ani suma vârstelor tuturor copiilor va fi egală cu 100 de ani.

22. Scrieți ca sumă de două numere iraționale numărul:
a) 5; b) –3; c) 8,5; d) $3\sqrt{15}$; e) 0; f) $\frac{1}{4}$.

23. Completați tabelul și trageți concluzii.

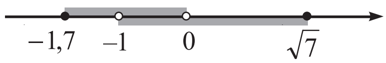
a	b	c	ab	ba	$a(bc)$	$(ab)c$	$a \cdot 1$	$b \cdot (-1)$	$\frac{1}{c}$	$c \cdot \frac{1}{c}$
–4	2,5	10								
$1\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{9}{15}$								
$\sqrt{2}$	–5	1,2								
0	$\sqrt{11}$	$-\sqrt{30}$								
$-\pi$	$\sqrt{7}$	2								

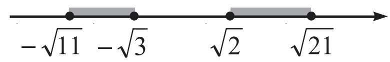
24. Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:
a) $(\square; 2) \cup (-\sqrt{5}, +\infty) = (-10, +\infty)$;
b) $[-\sqrt{5}, \square] \cap [\square, 7) = [1, 6]$;
c) $(-\infty; 2{,}5) \cup [\square, +\infty) = (-\infty, +\infty)$;
d) $(\square, \sqrt{37}) \cap (-\infty, 6) = (-3, 6)$.

25. Scrieți sub formă de interval sau reuniune de intervale de numere mulțimea reprezentată pe axă:

a) 

b) 

c) 

d) 

26. Efectuați: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:

a) $A=(-\infty, 5]\cup(-\sqrt{3}, 10)$;
b) $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{Q}$;
c) $A=\mathbb{Z}$, $B=[-4, 5)$;
d) $A=(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B=\mathbb{R}$.

3

27. Demonstrați egalitatea:

a) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$;
b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

28. Demonstrați că valoarea expresiei este un număr natural:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;
b) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$.

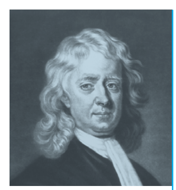
29. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

a) $\sqrt{2x-3}+|1{,}5y-x|+(z+2\sqrt{5})^2=0$;
b) $x^2-6x+y-8\sqrt{y}+25=0$.

30. ***Problema lui Newton***

În fiecare an, un negustor cheltuieşte 100 de lire pentru întreținerea familiei sale, apoi îşi sporeşte averea cu o treime. După trei ani, constată că şi-a dublat avuția.

Câți bani a avut negustorul la început?



Isaac Newton (1642–1727)

31. Demonstrați identitatea:

$$\sqrt{t^2+2+2\sqrt{t^2+1}}-\sqrt{t^2+2-2\sqrt{t^2+1}}=2.$$

32. Efectuați $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă $a, b\in\mathbb{R}$ şi:

a) $A=(-a, a)$, $B=(-\infty, a]$;
b) $A=[a-1, a+1]$, $B=[-3, 3]$, $a>1$;
c) $A=(-\infty, 0)$, $B=(-a-1, a+1)$, $a>0$;
d) $A=(-\infty, a]$, $B=[b, +\infty)$.

33. ***Matematică distractivă***

Utilizând operațiile aritmetice şi radicalul, cu ajutorul a 6 cifre de 4 obțineți numărul:

a) 0; b) 9; c) 11; d) 25.

34. Completați pătratul cu cele mai mici numere prime, astfel încât el să devină magic, dacă se ştie că suma numerelor de pe fiecare linie, coloană sau diagonală este 121.

67		
31		7

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. a) Scrieți în casetă litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă propoziția este falsă: 1

$-\sqrt{900} \in \mathbb{Z}$ ☐

$3\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ ☐

$6{,}2(5) \in \mathbb{R}_+$ ☐

$|4-3\sqrt{3}| \in \mathbb{I}_-$ ☐

Argumentați!

b) Completați cu un număr real, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: 1

$6{,}2-\sqrt{900}+4\frac{2}{5}-\square=2\,013.$

c) Aflați 25% din numărul real obținut la b). 1

d) Explicitați modulul $|4-3\sqrt{3}|$. 1

2. Nicu a făcut în 2 luni economii pentru a procura un album. În prima lună el a făcut o economie de bani ce reprezintă $\frac{3}{5}$ din prețul albumului, iar în luna a doua – o economie de 62 de lei. 3

a) Cât costă albumul?

b) În care dintre aceste luni s-a economisit o sumă mai mare de bani?

3. Rezolvați problema: 3

Viteza sunetului în aer este de 340 m/sec. La ce distanță (în kilometri) s-a produs tunetul care se aude după 10,5 secunde? Scrieți răspunsul sub forma $a \cdot 10^b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

1. a) Scrieți în casetă litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă propoziția este falsă:

$\sqrt{400} \in \mathbb{Z}$ ☐

$5\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ ☐

$-3{,}0(4) \in \mathbb{R}_-$ ☐

$|3-2\sqrt{2}| \in \mathbb{I}_+$ ☐

Argumentați!

b) Completați cu un număr real, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$-3{,}5+\sqrt{400}-7\frac{2}{5}+\square=2\,015.$

c) Aflați 25% din numărul real obținut la b).

d) Explicitați modulul $|3-2\sqrt{2}|$.

2. Un automobil a parcurs distanța de la Chişinău până la Ungheni în 2 ore. În prima oră el a parcurs $\frac{3}{5}$ din drum, iar în ora a doua – 48 km.

a) Care este distanța dintre Chişinău și Ungheni?

b) În care oră s-a parcurs o distanță mai mare?

3. Rezolvați problema:

Un CD-ROM poate înmagazina circa 650 Mb. Calculați câți biți vor fi înmagazinați în 3 CD-ROM-uri.

Scrieți răspunsul sub forma $a \cdot 10^b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

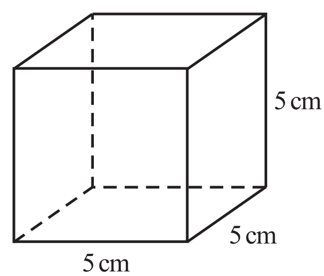
2 capitolul — Puteri şi radicali

§1. Puterea cu exponent întreg

1.1. Puterea cu exponent natural

1 Examinaţi şi completaţi adecvat:

$\mathcal{V}_{cub}=5\cdot5\cdot5=5^3=125\ (\text{cm}^3)$;



$\left(-\frac{1}{5}\right)^4=\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\square$;

$(\sqrt{2})^5=\square\cdot\square\cdot\square\cdot\square\cdot\square=\square$.

Definiţie. Puterea cu exponentul natural nenul m **a numărului real** a se numeşte produsul a m factori, fiecare egal cu a.

$a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{factori}}$, $a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}^*$.

a^m — a: baza puterii; m: exponentul puterii; a^m: puterea

$a^0=1,\ a\in\mathbb{R}^*$.
0^0 nu are sens.

Regulile de calcul cu puteri cu exponent natural

Pentru orice $a, b\in\mathbb{R}^*$, $k, m\in\mathbb{N}$:	*Verificăm*
1°. $1^m=1$	$1^3=1$
2°. $(-1)^{2m}=1$	$(-1)^6=1$
3°. $(-1)^{2m+1}=-1$	$(-1)^{17}=-1$
4°. $a^k\cdot a^m=a^{k+m}$	$a^3\cdot a^2=(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a)=a^{3+2}=a^5$
5°. $\frac{a^k}{a^m}=a^{k-m},\ k\geq m$	$\frac{a^4}{a^2}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a^{4-2}=a^{\square}$
6°. $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$	$(a\cdot b)^3=(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b)=a^{\square}\cdot b^{\square}$
7°. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$
8°. $(a^k)^m=a^{km}$	$(a^3)^2=(a\cdot a\cdot a)^2=(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a)=$ $=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^6=a^{3\cdot2}$

Să demonstrăm unele dintre proprietățile 4°–8°. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{N}$.

4° $a^k \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ factori}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(k+m) \text{ factori}} = a^{k+m}$.

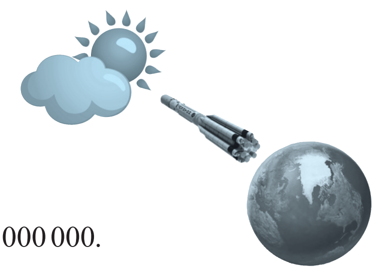
6° $(a \cdot b)^m = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{m \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ factori}} = a^m \cdot b^m$.

8° $(a^k)^m = \underbrace{a^k \cdot a^k \cdot \ldots \cdot a^k}_{m \text{ factori}} = a^{\overbrace{k+k+\ldots+k}^{m \text{ termeni}}} = a^{k \cdot m}$.

• Calculați:

a) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3} = \frac{\square}{\square}$; b) $\frac{2^5 \cdot (2^3)^4}{2^{15}} = \frac{2^5 \cdot 2^{\square}}{2^{15}} = 2^{5+\square-\square} = 2^{\square} = \square$.

1.2. Puterea cu exponent întreg



1 Observați cum se aplică puterea cu exponent întreg.

a) Distanța de la Pământ până la Soare este de

$1{,}495 \cdot 10^8$ km $= 149\,500\,000$ km.

$10^8 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000\,000$.

b) Norma zilnică de consum a vitaminei C pentru un adolescent este de

$5 \cdot 10^{-2}$ g $= 0{,}05$ g $= 50$ mg.

Explicăm

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}$

Numărul 10^{-2} (egal cu $\frac{1}{100}$) este puterea cu exponentul –2 a numărului 10. Numărul 10 este baza puterii 10^{-2}.

Generalizăm

$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factori}}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$.

$a^0 = 1$.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$.

• Examinați și completați adecvat:

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \square$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{\square}$

$2^2 = 2 \cdot 2 = \square$ $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{\square}$

$2^1 = \square$

$2^0 = 1$ $2^{-1} = \square$

b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $5^{\square} = \frac{1}{5}$; $5^{\square} = 25$; $5^{\square} = 1$; $5^{\square} = \frac{1}{25}$.

2 Observați și completați:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1:\frac{4}{9}=1\cdot\frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; b) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{15}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^2=\square$;

c) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^{-3}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^3=\frac{\square}{\square}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m,$$
pentru orice $a, b\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{Z}$.

Regulile de calcul cu puteri cu exponent întreg

Pentru orice $a, b\in\mathbb{R}^*$, $k, m\in\mathbb{Z}$:	**Verificăm**
1°. $1^m=1$	$1^{-1}=\frac{1}{1^1}=1$
2°. $(-1)^{2m}=1$	$(-1)^{-4}=\frac{1}{(-1)^4}=\frac{1}{1}=1$
3°. $(-1)^{2m+1}=-1$	$(-1)^{-17}=\frac{1}{(-1)^{17}}=\frac{1}{-1}=-1$
4°. $a^k\cdot a^m=a^{k+m}$	$a^3\cdot a^{-5}=a^3\cdot\frac{1}{a^5}=\frac{a^3}{a^5}=\frac{a^3}{a^3\cdot a^2}=\frac{1}{a^2}=a^{-2}=a^{3+(-5)}$
5°. $\frac{a^k}{a^m}=a^{k-m}$	$\frac{a^{-7}}{a^4}=\frac{1}{a^{\square}\cdot a^4}=\frac{1}{a^{\square}}=a^{\square}=a^{\square-\square}$
6°. $(ab)^m=a^m\cdot b^m$	$(ab)^{-3}=\frac{1}{(ab)^3}=\frac{1}{a^{\square}\cdot b^{\square}}=\frac{1}{a^{\square}}\cdot\frac{1}{b^{\square}}=a^{\square}\cdot b^{\square}$
7°. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\square}=\frac{b^{\square}}{a^{\square}}=\frac{a^{\square}}{b^{\square}}$
8°. $(a^k)^m=a^{k\cdot m}$	$(a^{-2})^5=\left(\frac{1}{a^2}\right)^5=\frac{1}{a^{\square}}=a^{\square}=a^{\square\cdot\square}$

• Observați și completați:

a) $\frac{(\sqrt{2})^4\cdot\frac{1}{8}}{16\cdot 2^{-5}}=\frac{2^2\cdot 2^{-3}}{2^4\cdot 2^{-5}}=2^{\square+\square-\square-(-5)}=2^{\square}=\square$;

b) $a^{-48}=(a^{\square})^{-8}=(a^{12})^{\square}=(a^{\square})^{24}=(a^{-3})^{\square}$;

c) $\frac{a^2+a^7}{a^{-2}+a^3}=\frac{a^{\square}(1+a^5)}{a^{\square}(1+a^5)}=a^{\square-\square}=a^{\square}$.

Exerciții și probleme

1

1. Citiți puterea. Indicați baza și exponentul puterii:

5^7; -7^3; $(-2)^5$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^0$; $(-2{,}3)^{21}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $(-3)^{-2}$.

2. Completați tabelul:

a	1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-0{,}2$
a^2						
a^3						

3. Completați caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $27=3^{\square}$; b) $1000=10^{\square}=(\sqrt{10})^{\square}$; c) $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\square}$;

d) $1=(2{,}3)^{\square}$; e) $1=(-1)^{\square}$; f) $-1=(-1)^{\square}$.

4. Scrieți sub formă de putere:

a) $x^5\cdot x^7$; b) $\frac{a^7\cdot a^3}{a^2}$; c) $(-4y)^2\cdot(4y^3)$; d) $a^9b^3\cdot\left(\frac{b^4}{a^2}\right)^2$.

5. *Adevărat* sau *Fals*?

Pentru $n\in\mathbb{Z}^*$:

a) $2^{-n}=-2^n$; b) $2^{-n}=\frac{1}{2^{-n}}$; c) $2^{-n}=\frac{1}{2^n}$; d) $2^{-n}=-\frac{1}{2^n}$.

6. Scrieți sub formă de putere cu exponent întreg negativ:

a) $\frac{1}{3^{27}}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{a^6}$; d) $\frac{1}{x^2}$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$; f) $\frac{1}{y}$.

7. Calculați:

a) 2^{-4}; b) 10^{-1}; c) 7^{-2}; d) $(-5)^{-3}$;

e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$; f) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$; g) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$; h) $\left(-2\frac{2}{7}\right)^{-1}$.

8. Completați tabelul:

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
10^n									
10^{-n}									

9. Scrieți numerele sub formă zecimală.

a) Viteza luminii este de $3\cdot10^5$ km/s.

b) Microscopul optic permite distingerea obiectelor cu lungimea de $2{,}5\cdot10^{-3}$ cm.

c) Diametrul moleculei de apă este de $2{,}8\cdot10^{-7}$ mm.

d) Creierul uman este capabil să memorizeze zilnic $8{,}6\cdot10^7$ biți de informație.

10. Utilizând proprietățile puterii cu exponent întreg, efectuați operațiile:

a) $a^4 \cdot a^{-2}$; b) $\dfrac{a^6}{a^{-4}}$; c) $x^{-3} \cdot x^5$; d) $\dfrac{x^{-3}}{x^{-5}}$;

e) $(b^{-2})^6$; f) $((c^{-5})^2)^{-1}$; g) $(x^2y^{-3})^{-2}$; h) $\left(\dfrac{c^{-2}}{a^{-1}}\right)^{-3}$.

11. Calculați:

a) $(3^2 \cdot 3^{-3})^{-1}$; b) $(7^{-1})^4 \cdot (7^{-2})^{-2}$; c) $\dfrac{4^3 \cdot 4^{-5}}{4^{-4}}$; d) $32 \cdot 2^{-6}$; e) $\dfrac{5^{-3} \cdot 5^5}{5^2 \cdot 3}$; f) $49 \cdot (7^{-2})^2$.

12. În tabel sunt indicate masele câtorva elemente chimice.

a) Scrieți denumirea elementului cu masa atomului cea mai mare; cea mai mică.

b) Comparați masele atomilor de cupru și natriu.

c) Scrieți într-un tabel denumirile acestor elemente în ordinea descrescătoare a masei atomilor lor.

Denumirea	Masa atomului (kg)
Aluminiu (Al)	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$
Heliu (He)	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$
Fier (Fe)	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$
Aur (Au)	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Cupru (Cu)	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Natriu (Na)	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$

2

13. Scrieți numărul 2^{60} sub formă de putere cu baza 4; 8; 16; 32.

14. Observați modelul și demonstrați similar că:

a) $81^3 + 3^{10}$ este divizibil cu 10;

b) $5^{13} + 125^5$ este divizibil cu 13.

Model:
$16^5 + 2^{15}$ este divizibil cu 33, deoarece
$16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} =$
$= 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) =$
$= 2^{15} \cdot 33.$

15. Completați astfel încât egalitatea să fie adevărată:

a) $3^{\square} = 81$; c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\square} = \dfrac{1}{125}$; e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\square} = \dfrac{8}{27}$;

b) $2^{\square} = \dfrac{1}{32}$; d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\square} = 64$; f) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\square} = \dfrac{25}{16}$.

16. Aflați valoarea expresiei:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$; b) $(-2)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{7}\right)^0$;

c) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-1\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$; d) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$.

17. Calculați:

a) $(2{,}5)^{-5} \cdot (0{,}4)^{-5} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$; b) $\dfrac{2^6}{(2^{-5} \cdot 8)^{-2}}$; c) $\dfrac{9^{-4} \cdot 4^{-4}}{2^{-9} \cdot 3^{-9}}$;

d) $\dfrac{5^5 \cdot 25^{-2}}{5^{-3} \cdot 125}$; e) $\dfrac{(0{,}1)^5 \cdot (0{,}1)^{-3}}{0{,}001}$; f) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 32^{-2}}$; g) $\dfrac{15^{-3}}{9^{-2} \cdot 125^{-1}}$.

18. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $5xy^2 \cdot 0{,}2x^{-3}y^{-1}$; b) $2\frac{1}{3}a^5b^{-8} \cdot \frac{3}{7}a^{-1}b^{12}$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-1}\right)^{-4} \cdot (0{,}5x^{-2})^2$; d) $\frac{(4a^3b^{-4})^{-1}}{0{,}2a^{-4}b^2}$.

19. Completați cu expresia adecvată:

a) $16x^{-12}y^8 = (\square)^4$; b) $\frac{1}{27}a^9b^6 = (\square)^{-3}$;

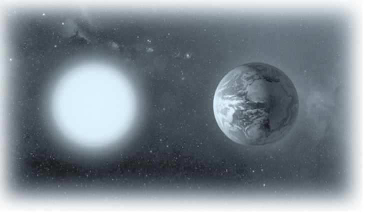
c) $\frac{x^5}{32y^{10}} = (\square)^{-5}$; d) $125a^{-15}b^{-3} = (\square)^3$.

20. Considerăm viteza luminii $c = 3 \cdot 10^5$ km/s.

a) Aflați în cât timp o rază de lumină parcurge distanța de 384 000 km de la Pământ până la Lună.

b) Anul-lumină este distanța parcursă de o rază de lumină timp de un an.

Considerând că anul are în medie 365,25 de zile, exprimați în ani-lumină distanța de $8{,}2 \cdot 10^{13}$ km de la Pământ până la steaua Sirius.



21. Densitatea cuprului este de $8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3. Aflați masa unei bucăți de cupru de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ m, 12 cm, $2 \cdot 10^{-2}$ m.

□ □ **3**

22. Scrieți sub formă de putere cu baza x:

a) $\frac{(x^3)^{-2} \cdot (x^{-7})^{-1}}{x^{-4}}$; b) $\frac{(x^{-2})^{-4} \cdot (x^2)^{-3}}{x^{-2}}$; c) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{x^5}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{3^0 \cdot x^{-1}}{x^2}\right)^5 : (x^{-2})^{14}$.

23. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\frac{3^{n-1} \cdot 7^{n+1}}{21^n}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\frac{15^n}{5^{n+1} \cdot 3^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

24. Fie $2^m = a$, $2^n = b$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$. Exprimați prin a și b expresia:

a) 2^{m+n}; b) 2^{m-n}; c) 8^{m+n}; d) 2^{2m-3n}.

25. Calculați forța de atracție F dintre Pământ și Lună utilizând formula $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ și următoarele date: $m_1 \cdot m_2 = 1{,}19 \cdot 10^{55}\,\text{kg}^2$; $R^2 = 2{,}25 \cdot 10^{16}\,\text{km}^2$; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-20}$.

26. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $(x^{-2} - y^{-2}) \cdot (x+y)^{-1}$; b) $\left(\frac{1}{x^{-2}} - \frac{1}{y^{-2}}\right) \cdot (x-y)^{-1}$; c) $\left(\frac{a^{-1}-1}{a^{-1}+1}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{1+a^{-1}}{1-a^{-2}}\right)^{-1}$.

27. Calculați $\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1} - (2\sqrt{2})^{-1}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-1}\right]$.

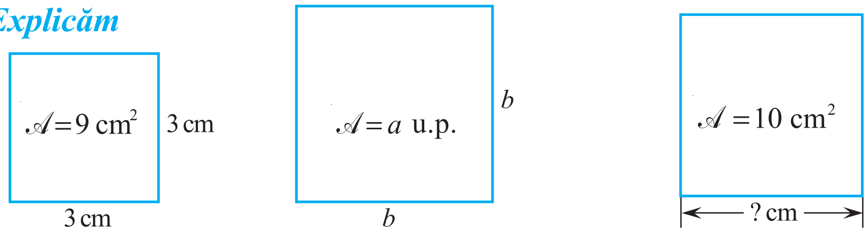
28. Monoxidul de carbon este nociv pentru sănătatea omului, de aceea concentrația lui în încăpere nu trebuie să depășească $0{,}2 \cdot 10^{-2}$ g/m^3. Ce număr maxim admisibil de molecule se pot afla într-o cameră de dimensiunile 4 m × 5 m × 2,5 m, dacă o moleculă de monoxid este formată dintr-un atom de carbon și unul de oxigen, adică are masa egală cu $12 + 16 = 28$ (u.a.)?

§2. Radicali. Recapitulare și completări

2.1. Rădăcina pătrată. Calcularea aproximativă a rădăcinii pătrate

1 Ce măsurări trebuie să efectuăm pentru a decupa din carton un pătrat cu aria de 9 cm^2? Dar un pătrat cu aria de 10 cm^2?

Explicăm



$3 \geq 0$ și $3^2 = 9$ $\qquad$ $b \geq 0$ și $b^2 = a$

$\sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $\sqrt{a} = b$

Definiție. Rădăcină pătrată din numărul real nenegativ a (sau radical din a) se numește numărul real nenegativ b, al cărui pătrat este egal cu a.

rădăcina pătrată din numărul a $\rightarrow \boxed{\sqrt{a}} = \boxed{b} \leftarrow$ valoarea rădăcinii pătrate $\rightarrow$ $\boxed{a, b \in \mathbb{R}_+,\ b^2 = a}$

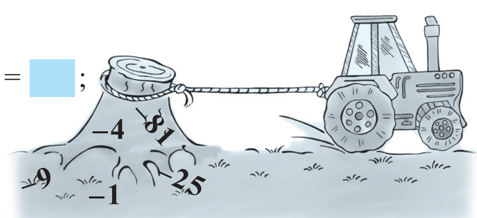
radical

• Examinați și completați adecvat:

$\sqrt{49} = 7$, deoarece $7 \geq 0$ și $7^2 = 49$;

$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \square$, deoarece $\square \geq 0$ și $\square^{\square} = \square$;

$\sqrt{0{,}01} = \square$, deoarece $\square \geq 0$ și $\square^{\square} = \square$.

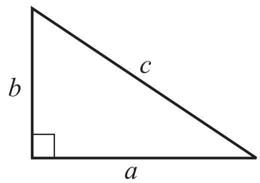


Observații. **1.** Rădăcina pătrată dintr-un număr real nenegativ există și valoarea ei este unică.
2. În mulțimea numerelor reale rădăcina pătrată a unui număr negativ nu există!

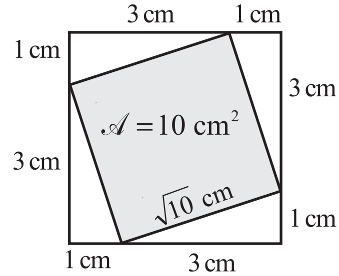
2 Observați și completați:

$(\sqrt{a})^2 = a$, pentru $a \in \mathbb{R}_+$.	$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.	$\sqrt{a}$ nu are sens, pentru $a \in \mathbb{R}^*_-$.
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$(\sqrt{3})^2 = 3$	$\sqrt{7^2} = \lvert 7 \rvert = 7$	$\sqrt{2x-1}$ are sens, dacă
$\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right)^2 = \square$	$\sqrt{(-5{,}1)^2} = \lvert \square \rvert = \square$	$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\left(\sqrt{\sqrt{3}-2}\right)^2 = \square$	$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \lvert \sqrt{3}-2 \rvert =$	$\Leftrightarrow 2x \geq \square \Leftrightarrow$
	$= \square$, deoarece $\square > \square$	$\Leftrightarrow x \geq \square$

3 Din definiția rădăcinii pătrate rezultă că pătratul cu aria de $10\ \text{cm}^2$ are latura de $\sqrt{10}$ cm. Examinați desenul şi observați cum poate fi decupat acest pătrat utilizând teorema lui Pitagora, care în curând va fi studiată la orele de geometrie:



$c^2 = a^2 + b^2$ – teorema lui Pitagora



4 Amintiți-vă algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate și explicați cum se calculează $\sqrt{10}$ cu o exactitate de trei zecimale.

$\sqrt{10{,}000000}$	3,162
9	$61 \cdot 1 = 61$
1 00	$626 \cdot 6 = 3756$
61	$6322 \cdot 2 = 12644$
3900	
3756	
14400	
12644	

INTERESANT ŞI UTIL

În Babilonul antic, pentru calculul valorii aproximative a rădăcinii pătrate se aplica formula $\sqrt{a^2+b} \approx a + \dfrac{b}{2a}$, unde $a > 0$ și $|b|$ este un număr foarte mic, în comparație cu a. Astfel, $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} \approx 3 + \dfrac{1}{6} = 3{,}1(6)$.

• Calculați $\sqrt{7}$ cu o exactitate de două zecimale, utilizând:
a) algoritmul extragerii rădăcinii pătrate;
b) metoda aplicată în Babilonul antic.

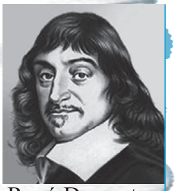
DIN ISTORIE...

În Grecia antică problema extragerii pătrate era asociată cu problema aflării lungimii laturii unui pătrat, a cărui arie era cunoscută. Însăşi rădăcina pătrată era numită „latură”.

Probabil din aceste considerente în latină noțiunile „latură” şi „rădăcină” sunt exprimate de acelaşi cuvânt – *radix*. De la el provine cuvântul *radical*.

În secolele XIII–XV, matematicienii europeni, în locul cuvântului *radix*, foloseau notația R^2. De exemplu, numărul $\sqrt{3}$ era scris astfel: $R^2 3$.

În secolul al XVI-lea, pentru reprezentarea acțiunii de extragere a rădăcinii pătrate se folosea simbolul $\surd$. Abia în secolul al XVIII-lea, renumitul matematician francez René Descartes a introdus în uz simbolul $\sqrt{}$, pe care îl utilizăm și în zilele noastre.



René Descartes (1596–1650)

2.2. Proprietăţi ale rădăcinii pătrate

1 Efectuaţi operaţiile şi comparaţi rezultatele:

$\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{900}=30;$ $\qquad$ $\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{25}=6\cdot 5=30;$

$\sqrt{\dfrac{9}{36}}=\sqrt{\dfrac{\square}{\square}}=\dfrac{\square}{\square};$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{9}{36}}=\dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=^{\square)}\dfrac{\square}{\square}=\dfrac{\square}{\square}.$

Proprietăţi ale rădăcinii pătrate

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, unde $a, b\in\mathbb{R}_+$.

2° $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, unde $a\in\mathbb{R}_+$, $b\in\mathbb{R}_+^*$.

Observaţie. Proprietatea 1° este adevărată pentru trei şi mai mulţi factori nenegativi.

Calculăm fără calculator de buzunar

2 Observaţi şi completaţi:

a) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}=\sqrt{35\cdot 15\cdot 21}=\sqrt{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 3}=$

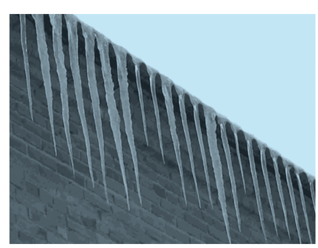
$=\sqrt{7^2\cdot\square^2\cdot\square^2}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square^2}=7\cdot\square\cdot\square=\square;$

b) $\sqrt{82^2-18^2}=\sqrt{(82+18)\cdot(82-18)}=\sqrt{\square\cdot\square}=\sqrt{\square}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square;$

c) $\sqrt{18^2+24^2}=\sqrt{(6\cdot 3)^2+(6\cdot 4)^2}=\sqrt{6^2\cdot 3^2+6^2\cdot 4^2}=\sqrt{6^2(3^2+4^2)}=$

$=\sqrt{\square^2\cdot\square}=\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square.$

3 În câte secunde va cădea un ţurţur de gheaţă din streaşina situată la înălţimea de 40 m de la suprafaţa pământului?



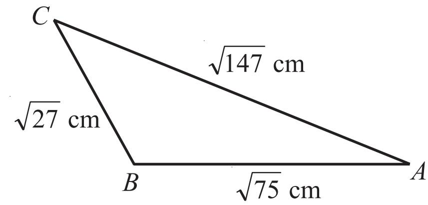
Pentru efectuarea calculelor, aplicaţi formula $h=\dfrac{gt^2}{2}$, unde h – înălţimea (în metri), t – timpul (în secunde), $g\approx 9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2$ – acceleraţia căderii libere.

Rezolvăm

$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}};\quad t\approx\sqrt{\dfrac{2\cdot 40}{9{,}8}}=\sqrt{\dfrac{40}{4{,}9}}=\sqrt{\dfrac{4}{0{,}49}}=\dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=\dfrac{\square}{\square}=\square.$

Răspuns: $t\approx\square$ secunde.

4 Utilizând datele din desenul alăturat, aflați perimetrul triunghiului *ABC*.



Rezolvare:

$$\mathscr{P} = AB + BC + AC = \sqrt{75} + \sqrt{27} + \sqrt{147} =$$

$$= \sqrt{25\cdot 3} + \sqrt{9\cdot 3} + \sqrt{49\cdot 3} =$$

$$= \square\sqrt{3} + \square\sqrt{3} + \square\sqrt{3} = \square\sqrt{3}\ \text{(cm)}.$$

Răspuns: $\mathscr{P} = \square\sqrt{3}$ cm.

Regula scoaterii factorului de sub radical

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2 b} = |a| b$.

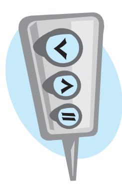
• Observați şi completați.

Aducem la forma cea mai simplă expresia $\sqrt{5b^2} + \sqrt{5a^2}$, unde $b > 0$, $a < 0$:

$$\sqrt{5b^2} + \sqrt{5a^2} = |b|\cdot\sqrt{5} + |a|\cdot\sqrt{5} = (\square \bigcirc \square)\sqrt{5}.$$

5 Comparați $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ cu $3\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Rezolvare:



$$5\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{25\cdot\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{25\cdot 3}{5}} = \sqrt{5\cdot 3} = \sqrt{15};$$

$$3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\square\cdot\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{\square\cdot 5}{3}} = \sqrt{\square\cdot\square} = \sqrt{\square};$$

$$5\sqrt{\frac{3}{5}} \bigcirc 3\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Regula introducerii factorului sub radical

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $b \geq 0$, atunci $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$

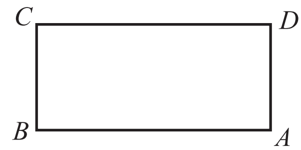
• Observați şi completați.

Aducem la forma cea mai simplă expresia $ba\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}$, unde $a > 0$, $b < 0$:

$$ba\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}} = -\sqrt{\frac{3a^2b^2}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}} = -\sqrt{\frac{\square}{\square}} = -\sqrt{\square} = \square.$$

2.3. Raționalizarea numitorului unui raport

Aria dreptunghiului $ABCD$ este de 7 cm^2.
Aflați lungimea laturii AB, dacă:
a) $BC=\sqrt{2}$ cm; b) $BC=3-\sqrt{2}$ cm.



Rezolvare:

$\mathscr{A} = AB \cdot BC$; $AB=\dfrac{\mathscr{A}}{BC}$.

a) $AB=\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}=3{,}5\sqrt{2}$ (cm);

b) $AB=\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{7\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7}=(3+\sqrt{2})$ (cm).

Răspuns: a) $AB=3{,}5\sqrt{2}$ cm; b) $AB=(3+\sqrt{2})$ cm.

În procesul rezolvării problemei am efectuat operația ce permite **raționalizarea numitorului** raportului dat.

Dacă numitorul raportului unor numere reale este un număr de formă $a\sqrt{b}$, unde $a\in\mathbb{Q}^*$, $b\in\mathbb{Q}^*_+$, atunci, pentru a obține la numitor un număr rațional, raportul se amplifică cu numărul $\sqrt{b}$.

• Observați și completați:

$\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\cdot\square}{\sqrt{3}\cdot\square}=\square$; $\dfrac{2}{3\sqrt{7}}=\dfrac{2\cdot\square}{3\sqrt{7}\cdot\square}=\square$.

Numerele de forma $a+\sqrt{b}$ și $a-\sqrt{b}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*_+$, se numesc ***conjugate***.

• Completați:
Conjugatul numărului $3+\sqrt{5}$ este $\square$.
Conjugatul numărului $-2-\sqrt{7}$ este $\square$.

Dacă numitorul raportului unor numere reale este un număr de forma $a+\sqrt{b}$ (sau $a-\sqrt{b}$), unde $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}^*_+$, atunci, pentru a obține la numitorul raportului un număr rațional, raportul se amplifică cu numărul $a-\sqrt{b}$ (respectiv $a+\sqrt{b}$) – conjugatul numitorului raportului dat.

• Observați și completați:

$$\frac{3}{2+\sqrt{3}}=\frac{3\cdot(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{3\cdot(2-\sqrt{3})}{4-3}=3(2-\sqrt{3})=6-3\sqrt{3};$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{2}\cdot(\boxed{})}{(3-\sqrt{5})\cdot(\boxed{})}=\frac{4\sqrt{2}\cdot(\boxed{})}{\boxed{}\cdot\boxed{}}=\boxed{}=\boxed{}.$$

Exerciții și probleme

1

1. Calculați:

a) $\sqrt{49}$; b) $\sqrt{1}$; c) $\sqrt{0,01}$; d) $(\sqrt{3,2})^2$; e) $(\sqrt{12,71})^2$;

f) $\sqrt{(-4,21)^2}$; g) $\sqrt{\frac{9}{169}}$; h) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; i) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; j) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

2. Fie $a=144$, $b=25$. Aflați valoarea expresiei:

a) $a\sqrt{b}$; b) $b\sqrt{a}$; c) $\sqrt{ab}$; d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; e) $a+\sqrt{b}$; f) $\sqrt{a}+b$; g) $\sqrt{a+b}$.

3. Calculați:

a) $2\sqrt{49}-3\sqrt{25}$; b) $4\sqrt{16}-2\sqrt{81}$; c) $10\sqrt{\frac{81}{100}}$;

d) $5\sqrt{\frac{36}{25}}$; e) $100\sqrt{0,04}-\sqrt{144}$; f) $1\frac{4}{7}\cdot\sqrt{4900}$.

4. Utilizând calculatorul de buzunar, extrageți rădăcina pătrată și rotunjiți rezultatul până la sutimi.

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{5,3}$; c) $\sqrt{50}$; d) $\sqrt{1,8}$; e) $\sqrt{12,56}$; f) $\sqrt{360}$.

5. Scrieți unul dintre semnele „>”, „<”, „≤”, „≥”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $\sqrt{a^2}=a$, pentru a ○ 0; b) $\sqrt{(a+2)^2}=a+2$, pentru a ○ -2;

c) $(\sqrt{1-a})^2=1-a$, pentru a ○ 1; d) $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$, pentru a ○ 1.

6. Între care două numere naturale consecutive este situat numărul:

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{17}$; c) $\sqrt{41}$; d) $\sqrt{151}$?

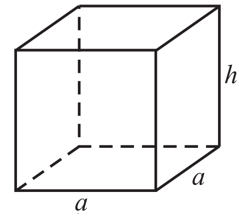
7. Aflați numărul întreg cel mai apropiat de numărul:

a) $\sqrt{50}$; b) $-\sqrt{35}$; c) $\sqrt{102}$; d) $-\sqrt{80,7}$.

8. Aflați valoarea expresiei:

a) $\sqrt{2-x}$, pentru $x=1$; b) $\sqrt{6x+3}$, pentru $x=-0,5$;

c) $\sqrt{x^2}$, pentru $x=-5$; d) $\sqrt{(2x+5)^2}$, pentru $x=-6$.



9. Volumul paralelipipedului dreptunghic a cărui bază este un pătrat cu latura a se calculează după formula $\mathcal{V}=a^2\cdot h$, unde h este înălțimea paralelipipedului.
Exprimați necunoscuta a din această formulă prin $\mathcal{V}$ şi h.

10. Calculați:
a) $\sqrt{16\cdot 121}$; b) $\sqrt{49\cdot 25}$; c) $\sqrt{9\cdot 0{,}36\cdot 16}$; d) $\sqrt{\frac{36}{169}}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{81}\cdot\frac{16}{25}}$; f) $\sqrt{17^2\cdot 3^2}$; g) $\sqrt{\frac{1}{17}}\cdot\sqrt{\frac{17}{49}}$; h) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}$.

11. Calculați:
a) $\sqrt{48\cdot 27}$; b) $\sqrt{50\cdot 72}$; c) $\sqrt{98\cdot 18}$; d) $\sqrt{75\cdot 243}$;
e) $\sqrt{13^2-12^2}$; f) $\sqrt{17^2-8^2}$; g) $\sqrt{25^2-24^2}$; h) $\sqrt{117^2-108^2}$.

12. Scoateți factorul de sub radical:
a) $\sqrt{72}$; b) $\sqrt{48}$; c) $\sqrt{75}$; d) $\sqrt{90}$; e) $\frac{\sqrt{54}}{3}$; f) $5\sqrt{\frac{1}{125}}$; g) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; h) $\frac{1}{7}\sqrt{147}$.

13. Introduceți factorul sub radical:
a) $3\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{7}$; d) $-3\sqrt{2}$; e) $6\sqrt{3}$; f) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; g) $-5\sqrt{0{,}2}$; h) $-2\sqrt{\frac{1}{8}}$.

14. Ce viteză va atinge la contactul cu solul o cărămidă ce cade de la 1 m? Folosiți calculatorul de buzunar şi rotunjiți rezultatul până la zecimi.
Indicații: $v=\sqrt{2gh}$, unde h – înălțimea, $g=9{,}8\ \text{m/s}^2$ – accelerația căderii libere.

2

15. Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{5}{3\sqrt{2}}$; c) $\frac{12}{5\sqrt{3}}$; d) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; e) $\frac{14}{9\sqrt{2}}$; f) $\frac{3}{2\sqrt{17}}$; g) $\frac{6}{\sqrt{21}}$; h) $\frac{2}{3\sqrt{14}}$.

16. Determinați valorile lui x pentru care are sens expresia:
a) $\sqrt{x}$; b) $\sqrt{-x}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; d) $\sqrt{x^2}$; e) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$; f) $\sqrt{-x^2}$; g) $\sqrt{x-1}$; h) $\sqrt{x^2+4x+4}$.

17. Aflați valoarea expresiei:
a) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; b) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$.

18. Calculați:
a) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$; b) $3\sqrt{48}-5\sqrt{3}-2\sqrt{27}$;
c) $\sqrt{3}(\sqrt{27}+4\sqrt{3})$; d) $\sqrt{2}\,(2\sqrt{2}+\sqrt{72})$;
e) $(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{12}$; f) $3\sqrt{80}+(6-\sqrt{5})^2-40$;
g) $(\sqrt{45}-\sqrt{5})^2-20$; h) $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{75}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

19. Utilizând algoritmul extragerii rădăcinii pătrate, calculați cu o exactitate de 3 zecimale:
a) $\sqrt{5{,}6644}$; b) $\sqrt{0{,}015129}$; c) $\sqrt{692{,}7424}$; d) $\sqrt{12{,}28}$.

20. Formula dată descrie relația dintre mărimi fizice pozitive. Aflați:

a) l, dacă $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$; b) S, dacă $t=\sqrt{\frac{2S}{a}}$; c) F, dacă $V=k\cdot\frac{\sqrt{F}}{l}$; d) L, dacă $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$.

21. Calculați cât mai simplu:

a) $\sqrt{4{,}58^2-4{,}42^2}$; b) $\sqrt{12^2+16^2}$; c) $\sqrt{24^2+32^2}$; d) $\sqrt{42^2+56^2}$.

22. Calculați:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-1}$; b) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}$; d) $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}-\frac{1}{2\sqrt{5}+1}$.

23. Simplificați raportul:

a) $\frac{15}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$; b) $\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; c) $\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$; d) $\frac{3\sqrt{8}+2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}+2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$.

24. Scoateți factorul de sub radical:

a) $\sqrt{32a^3b^{10}}$, unde $a>0,\ b\le 0$; b) $\sqrt{27(a-b)^5}$, unde $a>b$;

c) $\sqrt{-8(a-3)^3}$, unde $a<3$; d) $\sqrt{(x-2)^3(5-x)^5}$, unde $2<x<5$.

25. Introduceți factorul sub radical:

a) $a\sqrt{3}$, dacă $a<0$; b) $x\sqrt{x}$; c) $y\sqrt{-y}$;

d) $(a-b)\sqrt{a-b}$; e) $(x-y)\sqrt{y-x}$; f) $(1-a)\sqrt{\frac{2}{a-1}}$.

26. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{\frac{a^8b^{12}}{c^2}}$, dacă $c<0$; b) $-x\sqrt{x^2y^{16}}$, dacă $x<0$;

c) $m^2\sqrt{m^4n^{14}}$, dacă $n>0$; d) $\sqrt{x^2-6x+9}$, dacă $x\ge 3$;

e) $(a-5)\sqrt{\frac{3}{a^2-10a+25}}$, dacă $a>5$; f) $(a-b)\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}$, dacă $a<b$.

27. Raționalizați numitorul raportului:

a) $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$; b) $\frac{-3}{1-\sqrt{7}}$; c) $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$; d) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; e) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

3

28. Fără a utiliza calculatorul de buzunar, comparați numerele $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}$ şi $2\sqrt{2013}$.

29. Calculați, aplicând formulele $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ şi $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

30. Utilizând formulele radicalilor compuşi $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, unde $a, b\in\mathbb{R}_+$, $a\ge\sqrt{b}$, aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; b) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$.

31*. Raționalizați numitorul raportului:

a) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{7-\sqrt{2}}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

32. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Exerciții și probleme recapitulative

1

1. Calculați:

a) 7^{-2}; b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$; c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; d) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{a^{-12}\cdot a^{6}}{a^{8}}$; b) $\dfrac{(2x^{-3})^{-2}}{2^{-2}(x^{-2})^{-1}}$.

3. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $16<\sqrt{17}<18$; b) $3<\sqrt{11}<4$;

c) $2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{18}=3\sqrt{8}$.

4. Calculați:

a) $\sqrt{810\cdot 40}$; b) $\sqrt{90\cdot 6{,}4}$; c) $\sqrt{16{,}9\cdot 0{,}4}$;

d) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$; e) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{3\dfrac{1}{3}}$; f) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}+\sqrt{3\dfrac{6}{25}}$.

5. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $3\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{5}$; b) $(2-\sqrt{3})^2$;

c) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$; d) $(6-\sqrt{2})^2-(5+\sqrt{2})^2$.

6. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{36x^2y^3}$, dacă $x<0,\ y>0$; b) $\sqrt{\dfrac{a^6}{25b^2}}$, dacă $a\geq 0,\ b>0$;

c) $5xy\cdot\sqrt{\dfrac{1}{100xy^2}}$, dacă $x>0,\ y<0$.

2

7. Aria discului se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{A}=\pi R^2$. Aflați R, dacă $\mathcal{A}=1\,256\ \text{m}^2$, iar $\pi\approx 3{,}14$.

8. Verificați dacă numărul $3+\sqrt{2}$ este soluție a ecuației:

a) $2x-\sqrt{8}=6$; b) $x(3-\sqrt{2})=5$.

9. Pentru care valori reale ale variabilelor x şi y este adevărată propoziția:
$$\sqrt{xy}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}\,?$$

10. Pentru care valori reale ale variabilelor a şi b este adevărată propoziția:
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ?$$

11. Aduceți expresia la forma cea mai simplă, dacă $a,\ b\in\mathbb{R}_+^*$:

a) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$; b) $\sqrt{\dfrac{1}{a}}+\sqrt{\dfrac{1}{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{a}+\dfrac{\sqrt{b}}{b}$.

12. Efectuați: a) $(4a^{-2}-b^{-4})(2b^2-a)^{-1}$; b) $(a^{-2}+1)^{-2}$.

3

13. Calculați $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$, pentru $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ şi $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

14. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $(2-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, dacă $1\le x\le 2$.

16. Demonstrați că dacă $a>b$ şi $a^2+b^2=4ab$, atunci $\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1		Varianta 2
1. Scrieți numărul 81 ca putere cu baza: $3,\ \dfrac{1}{3},\ 9,\ \dfrac{1}{9}$.	1	**1.** Scrieți numărul 16 ca putere cu baza: $2,\ \dfrac{1}{2},\ 4,\ \dfrac{1}{4}$.
2. *Adevărat* sau *fals*? A/F $\left(\dfrac{2^3a^{-2}b^{-1}}{24ab^{-2}}\right)^{-1}=\dfrac{a^3}{3b}$.	2	**2.** *Adevărat* sau *fals*? A/F $\left(\dfrac{3^3x^{-1}y^{-2}}{54x^{-2}y}\right)^{-1}=\dfrac{2x}{y}$.
3. Pentru care valori reale ale lui x are sens expresia $\sqrt{-2x+3}$?	1	**3.** Pentru care valori reale ale lui y are sens expresia $\sqrt{5-3y}$?
4. Calculați cât mai simplu $\sqrt{52^2-48^2}$.	2	**4.** Calculați cât mai simplu $\sqrt{68^2-32^2}$.
5. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: a) $\sqrt{48}-13\sqrt{\dfrac{12}{25}}+\sqrt{4\dfrac{8}{25}}$; b) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.	4	**5.** Aduceți la forma cea mai simplă expresia: a) $\sqrt{45}+\sqrt{61\dfrac{1}{4}}-11\sqrt{1\dfrac{1}{4}}$; b) $(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2$.

3 capitolul — Calcul algebric

§1. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

1.1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

1 Examinați şi completați:

$-3ab^2+5bc-1{,}5ab^2+\sqrt{10}bc-a=$

$=(-3+(-1{,}5))ab^2+(\square+\square)bc-a=\square ab^2+\square bc-\square.$

Termeni asemenea: $-3ab^2$ şi $\square$, $\sqrt{10}bc$ şi $\square$.

Fiecare dintre expresiile algebrice $-3ab^2$, $5bc$, $-1{,}5ab^2$, $\sqrt{10}bc$, a este formată din **coeficient** şi **parte literală**. Coeficientul este număr real.

$-3ab^2$; $5bc$; $-1{,}5ab^2$; $\sqrt{10}\,bc$; $1a$

■ – coeficientul

■ – partea literală

Definiție. Termenii unei expresii care au aceeaşi parte literală se numesc **termeni asemenea**.

• Copiați şi completați tabelul:

Expresia	$-\sqrt{5}xy$	ab	$2{,}5x^3y$	$7a^2b$	$\frac{3}{5}t$	$-x^2y$
Coeficientul				7		
Partea literală		ab				

A reduce termenii asemenea înseamnă a înlocui suma acestor termeni cu un termen asemenea având coeficientul egal cu suma coeficienților termenilor dați.

2 Examinați şi continuați reducerea termenilor asemenea:

$2{,}5a^2-\sqrt{7}+\sqrt{5}ab^3+\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{2}ab^3+3\sqrt{7}-25=$

$=(2{,}5+\square)a^2+(\square-0{,}5)ab^3+\square\sqrt{7}-25=\square a^2+\square ab^3+\square\sqrt{7}-25.$

1.2. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere

1 Examinați şi completați:

a) $8a^2b\cdot(-1{,}5ab^3)=8\cdot(-1{,}5)\cdot\square^2\cdot a\cdot\square\cdot b^3=-\square\cdot a^3\cdot\square^4;$

b) $16x^3y^5:4x^5y^2=(16:4)\cdot(x^3:x^5)\cdot(y^5:y^2)=$

$$=\square\cdot x^{\square-\square}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}\cdot y^{\square}=\frac{\square\cdot y^{\square}}{x^{\square}}.$$

Pentru a înmulți (împărți) numerele reale reprezentate prin litere:
- înmulțim (împărțim) coeficienții;
- înmulțim (împărțim) părțile literale aplicând proprietățile puterii.

2 Examinați şi completați:

$$\left(-\frac{2}{5}a^2bc^4\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)^3\cdot a^{2\cdot\square}b^{\square}c^{4\cdot\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}\cdot c^{\square}.$$

Pentru a ridica la putere un număr real reprezentat prin litere:
- ridicăm la puterea dată coeficientul;
- ridicăm la puterea dată fiecare factor din partea literală.

1.3. Desfacerea parantezelor. Factorizări

1 Desfaceți parantezele şi completați:

a) $3xy^2\cdot(\sqrt{2}x^2+x^2y)=3xy^2\cdot\square+3xy^2\cdot\square=$

$=(3\cdot\square)\cdot x^{\square+\square}y^{\square}+3\cdot\square^{\square+\square}\cdot\square^{\square+\square}=$

$=\square+\square;$

b) $-1{,}5a^3b^2\cdot(4a^2b-0{,}2ab)=$

$=\square\cdot4a^2b-\square\cdot0{,}2ab=$

$=\square\cdot4\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}+\square\cdot0{,}2\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}=$

$=\square a^{\square}b^{\square}+\square a^{\square}b^{\square}.$

Desfacerea parantezelor

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$
$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Scoaterea factorului comun a

Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere este distributivă față de adunare şi scădere.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

• Observați și completați:

$(-2x+\sqrt{3}x^2y^2)\cdot(x^2+xy)=$

$=(-2x)\cdot\square+(-2x)\cdot xy+$

$+\square\cdot x^2+\sqrt{3}x^2y^2\cdot\square=$

$=\square+\square+\square+\square.$

Desfacerea parantezelor

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Gruparea și scoaterea factorului comun

Pentru orice numere reale a, b, c, d:

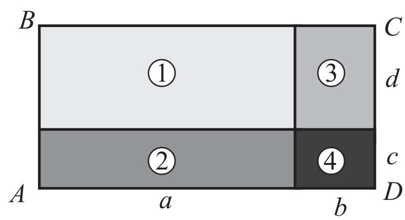
$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Activitate în perechi

• Argumentați formula

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd,$$

calculând aria dreptunghiului reprezentat prin două moduri.



2 Scrieți ca produs de factori expresia $6\sqrt{30}x^2y^3+3\sqrt{6}xy^5$.

Examinați și completați:

$6\sqrt{30}x^2y^3+3\sqrt{6}xy^5=\underbrace{2\cdot3\cdot\sqrt{5\cdot6}\cdot xy^2\cdot\square}+\underbrace{3\sqrt{6}\cdot xy^2\cdot\square}=$

$=\square\cdot(\underbrace{2\sqrt{5}\,\square}+\underbrace{\square}).$

factor comun   rezultatul împărțirii fiecărui termen la factorul comun

Scoaterea factorului comun:

$3\sqrt{5}+2\sqrt{15}=$

$=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$

$=\sqrt{5}(3+2\sqrt{3}).$

- **A factoriza expresia** înseamnă a scrie această expresie ca produs de expresii.
- Factorizarea se poate obține prin scoaterea factorului comun:

$$ab+ac=a(b+c),\ \sqrt{15}-2\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{5}-2).$$

• Completați adecvat:

$2{,}4a^5b^4-1{,}8a^2b=\square\cdot4\cdot a^5b^4-\square\cdot3\cdot a^2b=0{,}6\cdot\square^2\cdot\square(4a^{\square}b^{\square}-3).$

Exerciții și probleme

1

1. Copiați și completați tabelul:

a)

Expresia	$2{,}3x$	$-x^2y$	$\sqrt{5}ab$	ax^3	$-\sqrt{3}by$	$-5{,}(2)x^2yz$	$\frac{1}{5}a^2b^3c$
Coeficientul							
Partea literală							

b)

Expresia	$-\sqrt{7}xy$	a^2b	$-x^3z$	$7{,}(8)ax$	$\frac{4}{7}a^2b^3$	$3{,}8tz$	$-2axby$
Coeficientul							
Partea literală							

2. Observați expresia și scrieți termenii asemenea:

a) $3{,}5ax-2ty+\sqrt{3}ax+y^3-\sqrt{7}ty-7{,}3y^3+\sqrt{7}$;

$\boxed{3{,}5ax;\ \ldots}$ $\boxed{-2ty;\ \ldots}$ $\boxed{y^3;\ \ldots}$ $\boxed{\ldots}$

b) $\frac{2}{7}ab+\sqrt{13}a^2b-0{,}5ab-ab^3-5a^2b+7{,}5ab^3-3\sqrt{15}$.

$\boxed{-0{,}5ab;\ \ldots}$ $\boxed{-ab^3;\ \ldots}$ $\boxed{-5a^2b;\ \ldots}$ $\boxed{\ldots}$

3. Reduceți termenii asemenea:

a) $7\sqrt{7}-3\sqrt{3}+2{,}5\sqrt{7}+15\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; b) $5\sqrt{15}-2\sqrt{2}+\sqrt{60}+7\sqrt{8}-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{32}$.

4. Reduceți termenii asemenea:

a) $3x-6y+2{,}7x+35y-2$; b) $-2{,}7a+3b-1\frac{3}{4}a-\frac{2}{5}b+\sqrt{7}$;

c) $\sqrt{3}t-2z+3\sqrt{3}t-5{,}(2)z-\sqrt{7}tz$; d) $-2008+\frac{2}{3}ab^2-78ab+5\frac{1}{3}ab^2+2007-22ab$.

5. Scrieți ca sumă expresia:

a) $4{,}12x^2y$; b) $-3\sqrt{2}tz$; c) $6{,}(15)ab$; d) $-\frac{2}{7}xy^2$.

6. Efectuați înmulțirea:

a) $7x^2y^3z\cdot(-3xyz^3)$; b) $(-2{,}8ab)\cdot(-5a^3b)$;

c) $\frac{12}{17}ax\cdot(-1\frac{5}{12}a^3xy)$; d) $\sqrt{5}t^2\cdot(-6\sqrt{5}tz^4)$.

7. Efectuați împărțirea:

a) $5{,}2x^3y:0{,}4xy^2$; b) $-\frac{3}{17}ab^5:\frac{9}{17}a^2b^3$;

c) $\sqrt{15}t^2z^2:(-\sqrt{5}tz)$; d) $2{,}(5)a^3b^2:0{,}(5)a^4b$.

8. Ridicați la putere:

a) $(-3xy^2)^2$; b) $(\sqrt{5}a^2b)^4$; c) $(-2\frac{1}{5}tz)^{-3}$; d) $(\sqrt{2}a^3b^{-2})^{-2}$.

9. ***Activitate în perechi***

Adevărat sau *Fals*?

a) $-(1-4x)=4x+1$;
b) $5t+1=6t$;
c) $x+x+x=x^3$;
d) $-3x-7x=-10x$;
e) $|-x|+|x|=0$;
f) $\sqrt{3x}-x=\sqrt{3}$;
g) $\sqrt{9a}+\sqrt{16a}=7a$;
h) $\sqrt{5y}+\sqrt{5y}=\sqrt{5y^2}$.

10. Desfaceți parantezele:

a) $m(m+n)$;
b) $z(z-y)$;
c) $3a(b-2c)$;
d) $-\sqrt{2}(2x-\sqrt{2}y)$;
e) $1{,}7x(x+3y)$;
f) $\sqrt{7}(\sqrt{2}a+\sqrt{7})$.

11. Desfaceți parantezele:

a) $4x^2y(-3xy^5+8yz)$;
b) $-7{,}(2)ab(9a^2b^3-18abc)$;
c) $-\sqrt{7}t(\sqrt{14}tz-\sqrt{21}t^2z^3)$;
d) $\frac{2}{3}ab(18a^2b^2-15a)$.

12. Calculați aria dreptunghiului cu dimensiunile:

a) $(\sqrt{7}+4)$ cm și $(4-\sqrt{7})$ cm;
b) $(8-3\sqrt{5})$ cm și $(3\sqrt{5}+8)$ cm.

13. Desfaceți parantezele:

a) $(2x-3y)(5x+7y-1)$;
b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
d) $(x^2-y^2)(x+y)$;
e) $(a+2)(a^2-2a+4)$;
f) $(x+1)(x^2-x+1)$.

14. Descompuneți în factori:

a) $7ab^2+14a^2b$;
b) $-3{,}6x^2y^3+0{,}8x^4y^5$;
c) $2\sqrt{17}xy^4-\sqrt{17}x^2y$;
d) $-15tz^2-\sqrt{5}t^2z$;
e) $x(3-y)+5(y-3)$;
f) $2{,}5a(a-1)-(1-a)$.

2

15. Se știe că x și y sunt numere reale. Scrieți numărul real:

1) $5x+2y$; 2) $-3x+2$; 3) $-\sqrt{2}+2xy$:

a) ca sumă de trei numere reale reprezentate prin litere;
b) ca sumă de cinci numere reale reprezentate prin litere;
c) ca diferență de trei numere reale reprezentate prin litere;
d) ca sumă de opt numere reale nenule reprezentate prin litere.

16. Efectuați:

a) $\sqrt{7}x(\sqrt{7}xy-x)-(x-y)(\sqrt{28}x+y)-(\sqrt{7}xy)^2$;

b) $\frac{5}{7}x^{-1}\cdot y^{-2}(xy-49x^{-3})+\frac{1}{7}(x+y^2)(x-y^2)$;

c) $(-3\sqrt{11}a+5\sqrt{7}b)(-3\sqrt{11}a-5\sqrt{7}b)$;

d) $(x^2-3x^{-1})(x^2+3x^{-1})(-x^2-3x^{-1})$.

17. Efectuați:

a) $15a^3x^4y^5:(-35a^5x^2y^3)\cdot(\frac{1}{7}a^4xy)$; b) $\frac{28a^2x^4y^5}{16ax^2y^7}$; c) $\left(\frac{\sqrt{5a^3b^3c}}{\sqrt{30ab^4c^5}}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{-3\sqrt{7t^3z^2}}{5\sqrt{14tz^6}}\right)^{-2}$.

18. Demonstrați că egalitatea $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ este adevărată pentru orice $a, b\in \mathbb{R}^*$.

19. Efectuați:

a) $(a-2a)+(3a-4a)+(5a-6a)+(7a-8a)+(8a-9a)+(9a-10a)$;

b) $x-2x+3x-4x+\ldots+199x-200x$.

20. Ce este mai mare: aria unui dreptunghi cu dimensiunile $(6-2\sqrt{7})$ cm și $(6+2\sqrt{7})$ cm sau aria unui pătrat cu latura de $(2+\sqrt{3})$ cm?

21. Care dintre doi șahiști are o șansă mai mare de a repurta victorie la un turneu, știind că unul are șansa $p_1=\frac{7}{13}$ să obțină victorie, iar celălalt – $p_2=\frac{4}{7}$?

22. Scrieți ca produs de trei factori diferiți de 1:

a) $x^3(x-0{,}7)-x^2(x-0{,}7)$;

b) $(2x+y)^2(4x-3)-(2x+y)(4x-3)$;

c) $(x+1)^2(x-1)-(x+1)(x^2-1)$;

d) $x(-x+1)^3+x(x-1)^2-x(-x+1)$.

23. Calculați a^2, știind că

$$a=\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

24. Aflați cea mai mică valoare a expresiei:

a) x^2+5; b) x^2-2; c) $(3x)^2+(4x)^2$; d) $7x^2+1$.

25. ***Activitate în perechi***

Adevărat sau *Fals*?

a) $\sqrt{x}=-x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}_-$;

b) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$ pentru $x=0$;

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$ pentru $x=0$;

d) $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

În cazul în care propoziția este falsă, aflați răspunsul corect.

26. Calculați valoarea expresiei $|1-5a|+3|\sqrt{3}-a|-2\sqrt{3}$, dacă:

a) $a=0$; b) $a=-1{,}4$; c) $a=-\sqrt{2}$; d) $a=2{,}1(5)$.

27. Aflați valoarea rădăcinii pătrate fără a utiliza calculatorul de buzunar sau algoritmul extragerii rădăcinii pătrate:

a) $\sqrt{1\,587\,600}$; b) $\sqrt{28\,224}$; c) $\sqrt{2\,509\,056}$.

28. Din Chișinău spre Giurgiulești s-au pornit concomitent două autovehicule. Viteza unuia dintre ele era de 65 km/h, iar viteza celuilalt – de 72 km/h. Scrieți, printr-o expresie, care va fi distanța dintre autovehicule peste t ore. Calculați această distanță, dacă:

a) $t=0{,}5$; b) $t=1$; c) $t=1{,}5$; d) $t=2$.

29. Arătați că suma oricăror trei numere întregi consecutive este divizibilă cu 3.

$\square\ \square\ \boxed{3}$

30. Demonstrați că ecuația $\sqrt{x}=-x-1$ nu are soluții reale.

31. Demonstrați că expresia $\sqrt{x^2-6x+10}$ are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

32. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}$; b) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x}=0$.

33. Pentru care valori naturale ale lui n valoarea raportului $\dfrac{n^3+n-2}{n+1}$ este un număr întreg?

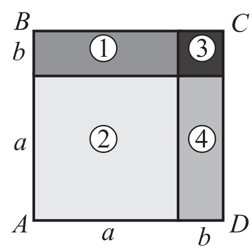
• Probleme pentru campioni

34. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2}$.

35. Aflați patru numere naturale consecutive al căror produs este egal cu 570 024.

§2. Formule de calcul prescurtat

2.1. Pătratul sumei și pătratul diferenței



1 Calculați, prin două moduri, aria pătratului $ABCD$:

$\mathcal{A}_{ABCD}=(\bigcirc+\square)^2$;

$\mathcal{A}_{ABCD}=\bigcirc^2+2\cdot\bigcirc\cdot\square+\square^2$.

Formula pătratului sumei de doi termeni:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=$
$=a^2+ab+ba+b^2=$
$=a^2+2ab+b^2$

• Completați adecvat:
Pătratul sumei de doi termeni este egal cu...

2 Examinați și completați adecvat:

$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=\bigcirc^2+2\cdot\bigcirc\cdot\square+\square^2=$
$=\bigcirc^2-2\cdot\bigcirc\cdot\square+\square^2$.

Formula pătratului diferenței:
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=$
$=a^2-ab-ba+b^2=$
$=a^2-2ab+b^2$

• Completați adecvat:
Pătratul diferenței este egal cu...

• Observați și completați adecvat:

a) $(2x^3+y^2)=\bigcirc^2+2\cdot\bigcirc\cdot\square+\square^2=4x^6+4\cdot\square+\square^4$;

b) $(\underset{a}{\sqrt{5}xy}-\underset{b}{y^5})^2=\underset{a^2}{\bigcirc^2}-2\cdot\underset{a}{\bigcirc}\cdot\underset{b}{\square}+\underset{b^2}{\square^2}=\square-2\square+\square$.

2.2. Produsul dintre sumă și diferență

1 Bunicul l-a rugat pe Dinu să calculeze mintal câte gutui au fost culese, știind că fructele au fost împachetate în 101 lăzi, astfel încât în fiecare ladă erau 99 de gutui.
Ajutați-l pe Dinu să efectueze calculul respectiv!

Rezolvare:
$101\cdot 99=(\square+\square)(\square-\square)=\square-\square=\square$.

Răspuns: $\square$ de gutui.

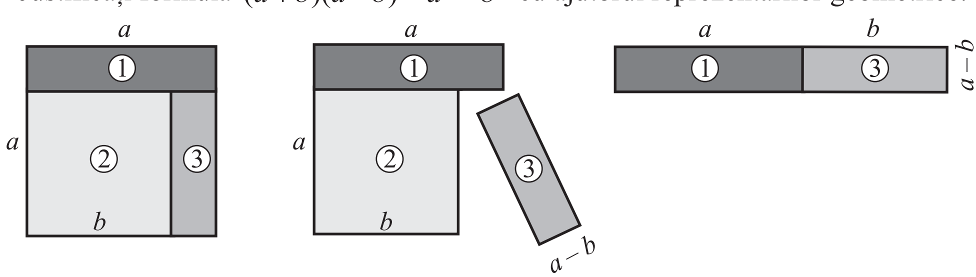
2 Observați și completați:
$(1{,}5t-\sqrt{2}z)(1{,}5t+\sqrt{2}z)=\boxed{(1{,}5t)}^2-\square^2=\square-\square$.

Formula produsului dintre sumă și diferență:
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$(a+b)(a-b)=$
$=a^2-ba+ba-b^2=$
$=a^2-b^2$

Activitate în perechi

• Justificați formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ cu ajutorul reprezentărilor geometrice:



• Completați adecvat:
Produsul dintre sumă și diferență este egal cu...

• Observați și completați:

$$\Big(\underset{a}{\tfrac{3}{4}x^{-2}}+\underset{b}{\sqrt{3}y}\Big)\Big(\underset{a}{\tfrac{3}{4}x^{-2}}-\underset{b}{\sqrt{3}y}\Big)=\underset{a^2}{\bigcirc^2}-\underset{b^2}{\square^2}=\bigcirc-\square$$

2.3. Cubul sumei și cubul diferenței

1 Examinați și completați:

a) $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^{\square}=(a+b)\cdot(\square^2+2\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$

$=a^3+2\square^2\bigcirc+a\cdot\bigcirc^2+b\cdot\square^2+2\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=$

$=a^3+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+b^3;$

b) $(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{y^2}_{b})^3=\underset{a^3}{\square^3}+3\underset{a^2}{\square^2}\underset{b}{\bigcirc}+3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc^2}+\underset{b^3}{\bigcirc^3}.$

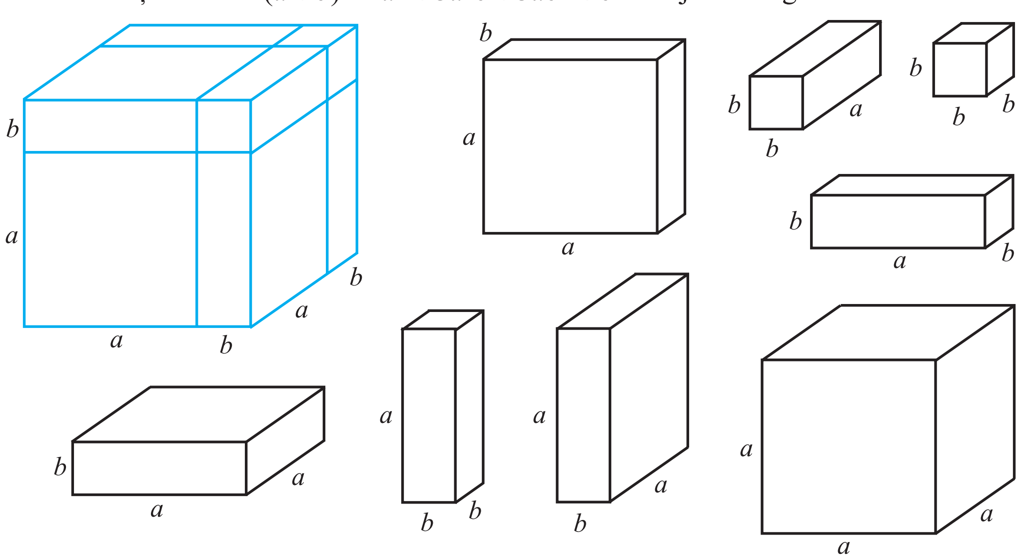
Formula cubului sumei de doi termeni:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(\square+\bigcirc)^3=\square^3+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+\bigcirc^3.$$

Activitate în perechi

• Justificați formula $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ cu ajutorul figurilor:



• Completați adecvat:
Cubul sumei de doi termeni este egal cu...

• Observați și completați adecvat:

$$(a^3+2ab)^3=(a^3)^{\square}+3(a^3)^{\square}\cdot 2ab+3\cdot a^3\cdot(2ab)^{\square}+(2ab)^{\square}=$$

$$=a^{\square}+6a^{\square}\cdot b^{\square}+12a^{\square}\cdot b^{\square}+8a^{\square}b^{\square}.$$

2 Examinați și trageți concluzia:

$$(a-b)^3=[a+(-b)]^3=a^3+3a^2\cdot(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Formula cubului diferenței:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(\square-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$$

• Examinați și completați adecvat:

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^{\square}-3a^{\square}b+3ab^{\square}-b^{\square}.$$

• Completați adecvat:
Cubul diferenței este egal cu...

3 Observați și completați:

$$(\underbrace{x^2}_{a}-\underbrace{0{,}5xy}_{b})^3=\underset{a^3}{\square}^3-3\underset{a^2}{\square}^2\underset{b}{\bigcirc}+3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc}^2-\underset{b^3}{\bigcirc}^3=\square-\square+\square-\square.$$

Activitate în perechi

4 Volumul cubului este egal cu a^3.
a) Lungimea muchiei cubului s-a mărit cu b. Cu ce este egal volumul noului cub?
b) Dacă lungimea muchiei cubului se micşorează cu b, cu ce va fi egal volumul noului cub?

2.4. Suma cuburilor. Diferența cuburilor

1 Examinați și trageți concluzia:

$a^3+b^3=(a+b)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, deoarece $(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2+\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=\square^3+\bigcirc^3.$$

• Completați adecvat:

$$x^3+27=\underset{\substack{\uparrow\\ a^3}}{x^3}+\underset{\substack{\uparrow\\ b^3}}{\bigcirc^3}=(\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{x}+\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\bigcirc})(\underset{\substack{\uparrow\\ a^2}}{x^{\square}}-\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{x}\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\bigcirc}+\underset{\substack{\uparrow\\ b^2}}{\bigcirc^{\square}}).$$

Formula sumei cuburilor:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\square^3+\bigcirc^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2).$$

• Examinați și completați:

$$8t^3+125z^6=(2t)^3+(5z^2)^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$$

$$=(\square+\bigcirc)(\square-\square+\square).$$

2 Examinați şi trageți concluzia:

$a^3-b^3=(a-b)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, deoarece $(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2-\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$$

• Completați adecvat:

$$x^3-27=\underset{\substack{\uparrow\\ a^3}}{x^3}-\underset{\substack{\uparrow\\ b^3}}{\bigcirc^3}=(\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{x}-\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\bigcirc})(\underset{\substack{\uparrow\\ a^2}}{x^{\square}}+\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{x}\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\bigcirc}+\underset{\substack{\uparrow\\ b^2}}{\bigcirc^{\square}}).$$

Formula diferenței cuburilor:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2).$$

• Completați adecvat:

Diferența cuburilor este egală cu produsul dintre diferența acestor numere și...

• Descompuneți în factori diferența cuburilor:

$$64t^6-8z^3=(4t^2)^3-(2z)^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$$

$$=(\square-\square)(\square+\square+\square).$$

Observație. Formulele de calcul prescurtat sunt identități.

Exerciții și probleme

1

1. Efectuați:

a) $(x+1)^2$; b) $(1+x)^2$; c) $(2a+3)^2$;

d) $(\sqrt{5}+t)^2$; e) $(0{,}5x^2y+y^4)^2$; f) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3}z)^2$.

$(a+b)^2=(b+a)^2$

$(a-b)^2=(b-a)^2$

2. Efectuați:

a) $(x-1)^2$; b) $(1-x)^2$; c) $(7a-1{,}1b^2)^2$;

d) $(\sqrt{11}-t^3)^2$; e) $(a^2b-ab)^2$; f) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2}t)^2$.

3. Efectuați:

a) $(-y+5)^2$; b) $(-b^3+5)^2$; c) $(t^2-z^2)^2$; d) $(-\sqrt{3}-2x)^2$;

e) $(-xy-y^3)^2$; f) $(ab-\sqrt{7}b^4)^2$; g) $(-x^2+y^3)^2$; h) $(-tz+t^5)^2$.

4. *Adevărat* sau *Fals*?

Pentru orice numere reale a, b, x, y:

a) $(a+b)^2=a^2+b^2$; b) $(x+3)^2=x^2-6x+9$;

c) $(5-x)=x^2-10x+25$; d) $(x-y)^2=(y+x)^2$;

e) $(-a-b)^2=(a+b)^2$; f) $(\sqrt{6}-x^2)=x^2-2\sqrt{6}x+6$;

g) $(x+2)^2=x^2+4$; h) $(2x-y)^2=4x^2-y^2$;

i) $(-3x+5)=25-30x+9x^2$.

5. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $(\sqrt{3}+2x)^2=\square+4\sqrt{3}x+\bigcirc$; b) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=\square+2\cdot\square\cdot\bigcirc+2y^2$;

c) $(a^2-2b^3)^2=\square-4\cdot\square\cdot\bigcirc+4b^6$; d) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=\square-2\cdot\square\cdot\bigcirc+3z^8$.

6. Efectuați: a) $(x-\sqrt{11})^2$; b) $(-x-\sqrt{11})^2$; c) $(-x+\sqrt{11})^2$;

d) $(x+\sqrt{11})^2$; e) $(\sqrt{11}-x)^2$; f) $(\sqrt{11}+x)^2$.

Trageți concluziile.

7. Efectuați:

a) $(x+5)(x-5)$; b) $(a+\sqrt{7})(a-\sqrt{7})$;

c) $(25-b)(25+b)$; d) $(\sqrt{30}-t)(\sqrt{30}+t)$;

e) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$; f) $\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

g) $(-\sqrt{11}+t)(\sqrt{11}+t)$; h) $(t+z^2)(-z^2+t)$.

$(-x+y)(x+y)=$
$=y^2-x^2$

8. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $(x+4)(x-4)=x^2-16$; b) $(a-5)(a+5)=(a-5)^2$;

c) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=x^2-49$; d) $(t-2)^2(t+2)^2=(t^2-4)^2$;

e) $(z+\sqrt{11})^2(z-\sqrt{11})^2=(z^2+11)^2$; f) $(-a-b)(a-b)=b^2-a^2$.

9. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $(\square - t^2)(\square + t^2) = 64z^2 - t^4$; b) $(\sqrt{3}a - b)(\square + b) = 3a^2 - b^2$;

c) $\left(\frac{1}{2}a - \square\right)\left(\frac{1}{2}a + \square\right) = \bigcirc - 25b^4$; d) $(0,3y + 2x)(\square - \bigcirc) = 0,09y^2 - 4x^2$.

10. Efectuați:

a) $(3x+1)^3$; b) $(2t+z^2)^3$; c) $(1+3x)^3$;

d) $(z^2+2t)^3$; e) $(2a+\sqrt{2}b)^3$; f) $(0,3a^3+5b^2)^3$.

$(a+b)^3 = (b+a)^3$

11. Aflați volumul cubului cu muchiile de:

a) $(2+3\sqrt{5})$ cm; b) $(1+\sqrt{11})$ cm; c) $(10-2\sqrt{2})$ cm; d) $(5\sqrt{6}-10)$ cm.

12. Efectuați:

a) $(3t-2z)^3$; b) $(a^2-b^2)^3$; c) $(2z-3t)^3$;

d) $(b^2-a^2)^3$; e) $(0,1x^3-\sqrt{2}y)^3$; f) $(\sqrt{5}a-\sqrt{7}b)^3$.

13. Completați adecvat:

a) $1000x^3 + y^3 = (10x+y)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square + \square)(\square + \square + \square)$;

b) $t^{12} + z^9 = (t^{\square})^3 + (z^{\square})^3 = (\square + \bigcirc)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square + \square)(\square + \square + \square)$;

c) $x^6 + 125y^3 = (x^{\square})^3 + \bigcirc^3 = (\square + \bigcirc)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square + \square)(\square + \square + \square)$.

14. Completați adecvat:

a) $729a^3 - 27b^3 = \square^3 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square^2 + \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square - \square)(\square + \square + \square)$;

b) $1 - 64t^{15} = \square^3 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square^2 + \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square - \square)(\square + \square + \square)$;

c) $343x^3 - y^{21} = \square^3 - \bigcirc^3 = (\square - \bigcirc)(\square^2 + \square\bigcirc + \bigcirc^2) =$

$= (\square - \square)(\square + \square + \square)$.

$\square$ **2** $\square$

15. Calculați:

a) $(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$;

b) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$;

c) $\left(\frac{2}{5} - 2\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 2\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{2}{5} - 2\sqrt{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 2\sqrt{3}\right)$;

d) $(0,7+\sqrt{11})^2 - (0,7-\sqrt{11})(-0,7-\sqrt{11}) + (\sqrt{11}-0,7)(0,7+\sqrt{11})$.

16. Calculați mintal:

a) 31^2; b) 51^2; c) 49^2; d) 99^2; e) 26^2; f) 101^2.

17. Calculați mintal:

a) $19 \cdot 21$; b) $98 \cdot 102$; c) $1004 \cdot 96$; d) $45 \cdot 55$.

18. Aflați aria pătratului cu laturile de:

a) $(10+2\sqrt{5})$ cm; b) $(3+\sqrt{15})$ cm; c) $(25-2\sqrt{5})$ cm; d) $(100-5\sqrt{8})$ cm.

19. Aflați aria dreptunghiului cu dimensiunile:

a) $(8-2\sqrt{5})$ cm și $(8+2\sqrt{5})$ cm; b) $(10+\sqrt{10})$ cm și $(10-\sqrt{10})$ cm.

20. Fie $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ și $y=\sqrt{15}-1$. Calculați valoarea expresiei $(x^2+y^2-10)^{2008}$.

21. Fie $x=\sqrt{6}+1$ și $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Calculați valoarea expresiei $(x^2-y^2-2)^{2007}$.

22. Aflați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

a) $(\sqrt{2999}-1)^2$ și $(\sqrt{2999}+1)^2$;

b) $(\sqrt{109}+1)^2$ și $(\sqrt{109}-1)^2$.

Model:
Media geometrică a numerelor $a \geq 0$ și $b \geq 0$ este $\sqrt{ab}$.
Fie $a=2{,}5$ și $b=10$. Atunci $\sqrt{ab}=\sqrt{2{,}5 \cdot 10}=\sqrt{25}=5$.

23. Completați adecvat:

a) $(\square + x^2)^3 = 8y^6 + 3\square^2\bigcirc + 3\square\bigcirc^2 + \bigcirc^3 = \square + \square + \square + \square$;

b) $(ab+\bigcirc)^3 = a^3b^3 + 6\square^2 d + 12\square d^2 + \bigcirc^3 = \square + \square + \square + \square$.

24. Efectuați:

a) $(x+2y^{-2})^3$; b) $(a^{-3}+ab^2)^3$; c) $\left(a^2+\frac{3}{4}b\right)^3$;

d) $(\sqrt{3}x^3+y^2)^3$; e) $(a^3b+0{,}1b)^3$; f) $(2{,}5z+3t^2)^3$.

25. Completați adecvat:

a) $(\square - b^3)^3 = 64a^{12} - 3\square^2\bigcirc + 3\square\bigcirc^2 - \bigcirc^3 = \square - \square + \square - \square$;

b) $(t^{-3} - \bigcirc)^3 = \square^3 - 3\square^2 \cdot z^3 + 3\square\bigcirc^2 - \bigcirc^3 = \square - \square + \square - \square$.

26. Efectuați:

a) $(a^2b^2-a^5)^3$; b) $(0{,}2t^2-z^4)^3$; c) $(x^{-3}-3y^2)^3$;

d) $(\sqrt{5}t^2-zt)^3$; e) $\left(\frac{2}{5}a^{-2}-a^2\right)^3$; f) $(z^6-10tz)^3$.

27. Factorizați:

a) $1000t^6z^6+t^{12}$; b) $a^9b^9+1728a^{15}$; c) $x^{-3}y^3+64x^{21}$.

28. Factorizați:

a) $t^9-27t^{12}z^{-12}$; b) $1331a^6-64b^3$; c) $0{,}027-(xy)^6$.

29. Efectuați:

a) $(x+y+3)^2$; b) $(5-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;

c) $(2x^2-x+1)^2$; d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$;

e) $(a+b)^4$; f) $(a-b)^4$.

$(a+b+c)^2 =$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

30. a) Efectuați: $(4m)^2$; $(4m+1)^2$; $(4m+2)^2$; $(4m+3)^2$.

b) Arătați că restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 4 este 0 sau 1.

31. a) Efectuați: $(5k)^2$; $(5k+1)^2$; $(5k+2)^2$; $(5k+3)^2$.

b) Care poate fi restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 5?

32. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x+2)^2-x^2=6$; b) $(2t-1)^2-4y^2=10$; c) $9x^2-5-(3x+2)^2=0$.

3

33. Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$ valoarea expresiei $3a^2-4ab+3b^2$ este pozitivă.

34. Scrieți expresia $2t^2+2z^2$ ca sumă a două pătrate.

35*. Raționalizați numitorul:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$.

36. *Problema lui Bhaskara II* (1114–1185) – *matematician şi astronom indian (hindus).*

Demonstrați că $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

37. Calculați: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}$.

38. Este rațional sau irațional numărul $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$?

39. Fie numărul întreg a, $a \neq 0$. Scrieți ca sumă algebrică:

a) pătratul predecesorului numărului a;

b) pătratul succesorului numărului $2a$;

c) pătratul predecesorului numărului $2a-1$;

d) pătratul sumei numărului a şi a inversului acestui număr.

40. Demonstrați că:

a) suma 11^3+19^3 este divizibilă cu 30;

b) suma 19^3+13^3 nu este un număr prim;

c) diferența 83^3-13^3 este divizibilă cu 10 şi cu 7;

d) diferența 87^3-36^3 se divide cu 17.

41. Se ştie că $A+\dfrac{1}{A}=2$. Calculați: a) $A^2+\dfrac{1}{A^2}$; b) $A^3+\dfrac{1}{A^3}$.

• Problemă pentru campioni

42. Demonstrați că diferența n^5-n^3, $n \in \mathbb{N}$, este divizibilă cu 6.

§3. Metode de descompunere în factori

3.1. Metoda factorului comun

• Scrieți ca produs de factori, folosind factorul comun, expresia $8x^2y^3-12xy^5$.

Rezolvare:

$$8x^2y^3-12xy^5=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}8x^2y^3:4xy^3=\square\, x^{\square}\\ 12y^5:4xy^3=\square\, y^{\square}\end{array}\right\}=$$

$$=4xy^3(2x^{\square}-3y^{\square}).$$

Factorul comun

① Aflăm c.m.m.d.c. al coeficienților 8 şi 12: $(8,12)=4$.

② Determinăm cel mai mic exponent al puterii fiecărui factor comun din părțile literale:

$x \longrightarrow \min(2,\ 1)=1.$

$y \longrightarrow \min(3,\ 5)=3.$

③ Scoatem factorul comun $4xy^3$. În paranteze rămâne rezultatul împărțirii fiecărui termen la $4xy^3$.

3.2. Aplicarea formulelor de calcul prescurtat

1 Observați şi completați adecvat:

a) $a^2+6ab+\bigcirc^2=(a+\bigcirc)^2$;

b) $\square^2+2\sqrt{2}xy+y^2=(\square+y)^2$.

Restrângerea pătratului sumei a doi termeni

$$a^2+2ab+b^2 \quad = \quad (a+b)^2$$

Desfacerea parantezelor

2 Examinați şi trageți concluzia:

a) $x^2-8xy+16y^2=(x-4y)^2$;

b) $3a^2-4\sqrt{3}ab+4b^2=$

$=(\sqrt{3}a)^2-2(\sqrt{3}a)(2b)+(2b)^2=$

$=(\square-\bigcirc)^2$.

Restrângerea pătratului diferenței

$$a^2-2ab+b^2 \quad = \quad (a-b)^2$$

Desfacerea parantezelor

3 Observați şi completați:

a) $9a^2-25b^2=(3a)^2-(5b)^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

b) $3x^2-\dfrac{y^4}{4}=(\sqrt{3}x)^2-\left(\dfrac{y^2}{2}\right)^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

• Completați propoziția:

Diferența pătratelor este egală cu...

• Calculați mintal: $\dfrac{2{,}01^2-1{,}99^2}{0{,}02}=\dfrac{(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)}{0{,}02}$.

4 Observați și completați:

a) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=$

$=(\square+\bigcirc)^3;$

b) $27a^3+3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2+125=$

$=(\square+\bigcirc)^3.$

Restrângerea cubului sumei de doi termeni

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

Desfacerea parantezelor

• Examinați și completați adecvat:

a) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3=$

$=a^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3;$

b) $0{,}001x^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-125y^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3.$

Restrângerea cubului diferenței

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

Desfacerea parantezelor

5 Descompuneți în factori suma cuburilor:

a) $a^3+125b^3=(2a)^3+(5b)^3=$

$=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2);$

b) $64+x^3y^3=\square^3+\bigcirc^3=\ldots$

Factorizarea

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Desfacerea parantezelor

6 Descompuneți în factori diferența cuburilor:

a) $1000-8t^3=\square^3-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2);$

b) $a^6b^6-27a^3=\square^3-\bigcirc^3=\ldots$

Factorizarea

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Desfacerea parantezelor

3.3. Metoda grupării termenilor

• Descompuneți în factori, aplicând metoda grupării:

a) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3};$ b) $an+pa-bn-pb.$

Rezolvare:

a) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}=(m^3-\sqrt{3}m^2)+(5m-5\sqrt{3})=$

$=m^2(m-\sqrt{3})+5(m-\sqrt{3})=(m-\sqrt{3})(m^2+5).$

b) $an+pa-bn-pb=(\square+\square)-(\square+\square)=$

$=\square\cdot(\square+\square)+\square\cdot(\square-\square)=(\square+\square)+(\square-\square).$

Pentru a descompune o expresie în factori utilizând metoda grupării:
- grupăm termenii expresiei, astfel încât să determinăm factorul comun;
- scriem expresia ca produs utilizând proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare (scădere).

Exerciții și probleme

1

1. Restrângeți ca pătrat al unei sume (diferențe):

a) $x^2-10x+25$; b) $16a^2-8a+1$; c) $36a^2b^2+12ab+1$;

d) $x^2+16x+64$; e) $64x^2y^2-16xy+1$; f) $1+18x+81x^2$.

2. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $x^2-2x+4=(x-2)^2$; b) $x^2-12x+36=(x-6)^2$;

c) $4a^2+8ab+b^2=(2a+b)^2$; d) $a^2+0{,}4a+0{,}04=(0{,}04+a)^2$.

3. Efectuați:

a) $100x^2-y^2=(10\square-\bigcirc)(10\square+\bigcirc)$; b) $1-64a^2b^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

c) $2-16x^4=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$; d) $3a^6-225a^2b^4=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$.

4. Restrângeți completând adecvat:

a) $1+3x+3x^2+x^3$; b) $64a^3+48a^2b+12ab^2+b^3$;

c) $1000+\square t+\square t^2+\bigcirc^3=(\square+t)^3$; d) $x^3+\square y+\square y^2+\bigcirc^3=(\square+2y)^3$.

5. Descompuneți în factori folosind factorul comun:

a) $26xy-39z$; b) $-121x^2y+11xy^2$; c) $12{,}5a^3b^2-2{,}5a^4b^2$; d) $2\sqrt{2}t^2-\sqrt{50}t$.

6. Descompuneți în factori suma cuburilor:

a) $(6a)^3+(a^6b)^3$; b) $(5x^2)^3+(x^4y)^3$; c) $(3t)^3+(tz)^3$.

7. Descompuneți în factori diferența cuburilor:

a) $(ab)^3-(a^2)^3$; b) $(t^5)^3-(2tz)^3$; c) $(x^2y)^3-(xy^2)^3$.

8. Descompuneți în factori utilizând metoda grupării:

a) $a^3+\sqrt{5}a^2-7a-7\sqrt{5}$; b) $3x^2y-xy^2-6x+2y$.

2

9. Scrieți ca produs de trei factori:

a) $t(z+1)^2-t(z-1)^2$; b) a^3-ab^2;

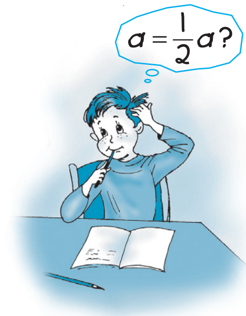
c) $(x^2+5)^2-6(x^2+5)$; d) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$.

10. Descompuneţi în factori:

a) x^2-4x+3; b) $x^2+10x+24$; c) $a^2+ab-3a-3ab$;

d) $a^2b^2-5a^2b+6a^2$; e) $a^2-14x+48$; f) $tz^2-6tz+16z$.

11. Găsiţi greşeala în raţionamentele de mai jos.



Sofismul *Orice număr este egal cu jumătatea sa.*

Considerăm numerele egale a şi b. Înmulţim ambii membri ai egalităţii $a=b$ cu a şi din ambii membri scădem b^2. Obţinem $a^2-b^2=ab-b^2$, sau $(a-b)(a+b)=b(a-b)$. Împărţind ambii membri la $a-b$, obţinem $a+b=b$. Cum $b=a$, obţinem $a+a=a$ sau $2a=a$, de unde $a=\frac{1}{2}a$.

12. Găsiţi greşeala.

Sofismul *Toate numerele sunt egale între ele.*

Fie numerele m şi n şi identitatea $m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2$. Atunci $(m-n)^2=(n-m)^2$. Extragem rădăcina pătrată din ambii membri ai egalităţii şi obţinem $m-n=n-m$ sau $2m=2n$. Deci, $m=n$.

13. *Problemă din India antică*

Dacă înmulţim un număr cu 3, apoi împărţim numărul obţinut la 5 şi mărim rezultatul cu 6, iar din ultimul număr extragem rădăcina pătrată, apoi din numărul obţinut scădem 1 şi ridicăm rezultatul la pătrat, obţinem 4. Aflaţi acest număr.

Indicaţie. Utilizaţi metoda drumului invers.

14. Scrieţi numărul ca diferenţă de pătrate de numere întregi:

a) 13; b) 17; c) 20; d) 60; e) 1001.

15. a) Determinaţi cea mai mică valoare a expresiei x^2-4x+4 pentru $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi cea mai mică valoare a expresiei $x^2+8x+20$ pentru $x\in\mathbb{R}$.

c) Determinaţi cea mai mare valoare a expresiei $-x^2+6x-9$ pentru $x\in\mathbb{R}$.

d) Determinaţi cea mai mare valoare a expresiei $-x^2-20x-105$ pentru $x\in\mathbb{R}$.

16. Arătaţi că numărul este pătrat perfect:

a) $\overline{a4}\cdot\overline{a6}+1$, dacă a este cifră nenulă;

b) $\overline{a7}\cdot\overline{a5}+1$, dacă a este cifră nenulă.

Model:

$\overline{ab}=10a+b$; $\overline{3b}=30+b$.

17. Descompuneţi în factori:

a) $27x^{-3}+64x^{-6}y^3$; b) $512t^{12}+0{,}001t^3z^6$; c) $1+125a^3b^{15}$.

18. Descompuneţi în factori:

a) $8t^{12}z^{-6}-t^3z^{-9}$; b) $729a^{21}b^9-0{,}008a^{15}$; c) $\frac{x^6}{64}-\frac{8x^3y^{24}}{27}$.

19. Pătratul sumei a două numere naturale consecutive este cu 264 mai mare decât suma pătratelor lor. Aflaţi aceste numere.

20. Arătaţi că $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$.

21. Determinaţi numerele reale x şi y ştiind că:

a) $x^2+6x+4y^2-4y+10=0$; b) $0{,}16x^2+0{,}8x+y^2-2y+2=0$.

22. Arătaţi că numărul este pătrat perfect:

a) $(t^2+t)(t^2+t+2)+1,\ t\in\mathbb{Z}$; b) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1,\ x\in\mathbb{Z}$.

23. Demonstraţi că, oricare ar fi numerele reale nenegative a şi b, este adevărată inegalitatea $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (inegalitatea mediilor).

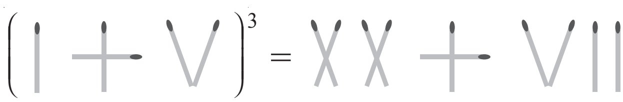
24. Demonstraţi că, dacă suma a două numere este divizibilă cu un număr, atunci şi suma cuburilor acestor numere este divizibilă cu numărul respectiv.

25. ***Matematică distractivă***

Schimbaţi poziţia:

a) unui chibrit pentru a obţine o egalitate adevărată:

b) a două chibrituri pentru a obţine o egalitate adevărată:



§4. Rapoarte algebrice. Recapitulare şi completări

4.1. Noţiunea de raport algebric

Ne amintim

Dacă a şi b sunt numere reale, $b\neq 0$, atunci prin **raportul numerelor** a şi b înţelegem produsul $a\cdot b^{-1}=a:b=\frac{a}{b}$. Elementele raportului numerelor sunt: numărător (a), numitor (b) şi valoare a raportului (c): $\frac{a}{b}=c$.

Raportul a două expresii algebrice se numeşte **raport algebric**.

Elementele raportului algebric sunt: numărător, numitor.

• Fie rapoartele algebrice: a) $\frac{a+3}{a-3}$; b) $\frac{(2a+5)(a+3)}{a^2-9}$; c) $\frac{a}{a^2+1}$.

Aflaţi DVA.

Rezolvare:

a) Raportul $\frac{a+3}{a-3}$ are sens pentru $a-3\neq 0$.

Răspuns: $\text{DVA}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

b) Raportul $\dfrac{(2a+5)(a+3)}{a^2-9}$ are sens pentru $a^2-9\neq 0$, deci, $a^2\neq 9$.

Răspuns: $\text{DVA}=\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$.

c) Raportul $\dfrac{a}{a^2+1}$ are sens pentru $a^2+1\neq 0$. Dar $a^2+1>0$ pentru orice a real.

Răspuns: $\text{DVA}=\mathbb{R}$.

Mulțimea valorilor pentru care are sens raportul algebric se numeşte **domeniul valorilor admisibile** (DVA) al raportului. DVA al unui raport algebric cu o variabilă este o submulțime din $\mathbb{R}$ în care numitorul raportului nu se anulează.

Fie expresiile: $A=(x-1)(2x-1)$ şi $B=x^2-1$.

a) Scrieți raportul $\dfrac{A}{B}$.

b) Aflați DVA al raportului $\dfrac{A}{B}$.

c) Aduceți la forma cea mai simplă în DVA raportul $\dfrac{A}{B}$.

Rezolvare:

a) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1}$.

b) $\text{DVA}: x^2-1\neq 0$, deci, $x\neq -1$ şi $x\neq 1$. $\text{DVA}: x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

c) În DVA avem $\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Ne amintim

Amplificarea sau simplificarea unui raport algebric se execută în DVA. Prin amplificarea sau simplificarea unui raport algebric obținem un raport egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile al celor două rapoarte.

Rezolvăm

• Simplificați raportul:

a) $\dfrac{n+1}{n^2-1}$; b) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$.

Rezolvare:

a) $\dfrac{n+1}{n^2-1}$, DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, $\dfrac{n+1}{n^2-1}=\dfrac{n+1}{(n-1)(n+1)}^{(n+1}=\dfrac{1}{n-1}$;

b) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$, DVA: $\mathbb{R}$, $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}^{(x^2+x+1}=x-1$.

• Raționalizați numitorul raportului $\frac{\sqrt{2}-n}{\sqrt{2}+n}$.

Rezolvare:

$\frac{\sqrt{2}-n}{\sqrt{2}+n}$, DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}\}$, $\quad {}^{\sqrt{2}-n)}\frac{\sqrt{2}-n}{\sqrt{2}+n}=\frac{(\sqrt{2}-n)^2}{(\sqrt{2}-n)(\sqrt{2}+n)}=\frac{(\sqrt{2}-n)^2}{2-n^2}$.

• Aduceți la același numitor rapoartele: $\frac{x^2}{x^3-9x}$; $\frac{2}{x+3}$; $\frac{2}{3-x}$.

Rezolvare:

Aflăm DVA al fiecărui raport:

$\frac{x^2}{x^3-9x}$, DVA: $x^3-9x\neq 0$, $x(x^2-9)\neq 0$, deci, $x\neq 0$, $x\neq -3$, $x\neq 3$. DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-3, 0, 3\}$;

$\frac{2}{x+3}$, DVA: $x+3\neq 0$, deci, $x\neq -3$. DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$;

$\frac{2}{3-x}$, DVA: $3-x\neq 0$, deci, $x\neq 3$. DVA: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Domeniul comun al valorilor admisibile pentru rapoartele date este mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{-3, 0, 3\}$.

În acest DVA, simplificăm raportul: $\frac{x^2}{x^3-9x}^{(x}=\frac{x}{x^2-9}$.

Numitorul comun al rapoartelor $\frac{x}{x^2-9}$, $\frac{2}{x+3}$ și $\frac{2}{3-x}$ este expresia $(x^2-9)=(x+3)(x-3)$. Amplificăm rapoartele $\frac{2}{x+3}$ și $\frac{2}{3-x}$ cu $(x-3)$ și, respectiv, cu $(3+x)$.

Obținem: $\quad {}^{x-3)}\frac{2}{x+3}=\frac{2(x-3)}{x^2-9}$; $\quad {}^{3+x)}\frac{2}{3-x}=\frac{2(3+x)}{9-x^2}=\frac{2(3+x)}{-(x^2-9)}=-\frac{2(3+x)}{x^2-9}$.

Prin simplificare sau amplificare putem aduce rapoartele algebrice la un numitor comun.
Prin amplificarea sau simplificarea unui raport algebric se poate modifica DVA.
Prin simplificare raportul algebric se aduce la un raport ireductibil.

4.2. Operații cu rapoarte algebrice

• Efectuați în DVA:

a) $\frac{d}{10}+\frac{7}{10}$; b) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$; c) $m+\frac{m^2n}{m-n}$; d) $\frac{a+b}{a-c}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2-b^2}$.

Rezolvare:

a) $\frac{d}{10}+\frac{7}{10}=\frac{d+7}{10}$;

b) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},\ b\neq 0;$

c) $m+\frac{m^2n}{m-n}=\frac{m(m-n)}{m-n}+\frac{m^2n}{m-n}=\frac{m^2-mn+m^2n}{m-n},\ m-n\neq 0;$

d) $\frac{a+b}{a-c}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)}{a-c}\cdot\frac{(a-c)(a^2+ac+c^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ac+c^2}{a-b},$

$a-c\neq 0,\ a-b\neq 0,\ a+b\neq 0.$

Observație. Operațiile cu numere reale reprezentate prin litere şi cu rapoarte algebrice în DVA se efectuează la fel ca şi operațiile cu numere reale. Proprietățile operațiilor cu rapoarte algebrice în DVA sunt aceleaşi ca şi în cazul operațiilor cu numere reale reprezentate prin litere.
Ordinea efectuării operațiilor este aceeaşi.
Rezultatul efectuării operațiilor cu rapoarte algebrice este o expresie algebrică al cărei DVA poate fi diferit de DVA al rapoartelor algebrice inițiale.

Exerciții și probleme

1

1. Enumerați elementele raportului:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; b) $\frac{a}{a^2+1}$; c) $\frac{m^3+n^3}{m+n}$; d) $\frac{ac}{a+c}$.

2. Aflați valorile reale ale variabilei x pentru care nu are sens raportul:

a) $\frac{1}{2x}$; b) $\frac{x-1}{x+3}$; c) $\frac{x-5}{(x-5)^2}$;

d) $\frac{x^3+8}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2-2}{x^2+2}$; f) $\frac{8x}{x(x-1)}$.

3. Aflați DVA al raportului:

a) $\frac{1}{x-2}$; b) $\frac{a}{a^2-4}$; c) $\frac{15}{\sqrt{2}+b}$; d) $\frac{x+2}{x^3+8}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{x}{2y}+\frac{y}{2y}$; b) $\frac{m}{2m+2n}+1$; c) $\frac{3a^2}{a^2-1}-\frac{a}{9a}$; d) $\frac{a+2}{a}-\frac{a}{a+2}$.

5. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{2}{5x}+\frac{3}{5x}-\frac{24}{10x}$; b) $\frac{5x+1}{2y}+\frac{7-3x}{2y}-\frac{4x-1}{4y}$;

c) $\frac{a^2-1}{a+1}\cdot\frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$; d) $\frac{a-b}{4b^3}\cdot\frac{2b^4}{a^2-ab}$.

2

6. Calculați valoarea expresiei:

a) $\frac{a^3-1}{2a^3}\cdot\frac{5a^2}{a^2+a+1}$, dacă $a=-3$; b) $\frac{a^2-4}{a^2-3a+9}:\frac{a+2}{a^3+27}$, dacă $a=0,5$.

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{-x}{x-3}+\frac{3}{3-x}+\frac{2x}{x-3}$; b) $\frac{a}{-1+a^2}+\frac{1}{a^2-1}$; c) $\frac{2p}{2p+3}+\frac{5}{3-2p}-\frac{4p^2+9}{4p^2-9}$.

8. Efectuați operațiile:

a) $\frac{3(a+2)}{2(a^3+a^2+a+1)}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}$;

b) $\frac{5}{x^2-1}+\frac{3}{2(x+2)}-\frac{3}{2(x-1)}$.

9. Simplificați. Comparați DVA al raportului inițial cu DVA al raportului obținut:

a) $\frac{a^2-10a+25}{(a-4)^2-1}$; b) $\frac{a^2+6a+9}{(a+2)^2-1}$;

c) $\frac{(b-6)^2-9}{-81+18p-p^2}$; d) $\frac{9+100p^2-60p}{100p^2-9}$.

3

10. Demonstrați că valoarea raportului este egală cu 2 pentru orice valoare reală a variabilei:

a) $\frac{(a+7)^2+(a-7)^2}{a^2+49}$; b) $\frac{(12m+5)^2+(12m-5)^2}{25+144m^2}$.

11. Demonstrați că domeniul valorilor admisibile al raportului este $\mathbb{R}$:

$$\frac{(x+2)^2-2(x+7)(x+2)+(x+7)^2}{(x+5)^2-2(x+5)(x-1)+(x-1)^2}.$$

12. Demonstrați că valoarea raportului este constantă pentru orice x real nenul:

$$\frac{(x-3)^2+2(x-3)(x+3)+(x+3)^2}{(x+7)^2+2(x+7)(x-7)+(x-7)^2}.$$

13. Fie raportul $\frac{2a^3-b^3}{a^3+a^2b-3ab^2}=r$. Demonstrați că dacă substituim a cu αa și b cu αb, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, atunci valoarea raportului rămâne aceeași.

• *Problemă pentru campioni*

14. Demonstrați că valoarea raportului $\frac{51^3+49^3}{100}$ este număr natural, iar valoarea raportului $\frac{51^3+49^3}{200}$ nu este număr întreg.

Exerciții și probleme recapitulative

1

1. Reduceți termenii asemenea:

a) $6xy-3x\sqrt{y}+1{,}5xy+25+3x\sqrt{y}$;　　b) $-0{,}25a^2b^3+5(3a^2b^3-ab)+1{,}4ab-0{,}7$;

c) $(2a-1)^2-(3a+4)^2$;　　d) $(1{,}4x+2y)^2+(3x-5y)^2$.

2. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $6x-y=-(y-6x)$;　　b) $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$;

c) $(3t+z)^3=27^3+z^3$;　　d) $(1-5x)^2=(5x-1)^2$.

3. Completați tabelul:

a	b	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2	$(a+b)^3$	$(a-b)^3$	a^3-b^3	a^3+b^3
1	$8x^3$							
t^6	$-z^3$							
$27x^{-3}$	y^6							
$(ab)^3$	$64b^{12}$							

4. Aflați valoarea expresiei:

a) $(x+1)(x^2-x+1)-x^3$, dacă $x=9{,}73$;　　b) $(x-2)(x^2+2x+4)+8$, dacă $x=2$.

5. Descompuneți în factori folosind diverse metode:

a) x^2-25;　　b) $4-81t^2$;　　c) $8+a^3$;　　d) c^3+8x^3;

e) $\frac{1}{27}+x^{-3}$;　　f) $-c^6-27x^3$;　　g) $0{,}008+y^3z^9$;　　h) $125m^{-3}-n^{-6}$.

6. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $(a^3-1)(a^6+a^3+1)$;　　b) $(m-1)(m^2+m+1)$;

c) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$;　　d) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

7. Simplificați raportul:

a) $\frac{a^2-16}{8+2a}$;　　b) $\frac{a^2+6a+9}{5a+15}$.

2

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $4x^2-25=0$;　　b) $\frac{1}{4}z^2-16=0$;　　c) $0{,}36-x^2=0$;　　d) $0{,}01t^2-1=0$.

9. Demonstrați identitatea:

a) $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$;　　b) $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$;

c) $c^2-7c+10=(c-2)(c-5)$;　　d) $x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$.

10. Completați pentru a obține pătratul unei sume sau a unei diferențe:

a) $9x^2+x+\bigcirc=(\square+\bigcirc)^2$;　　b) $t^2+\square+\frac{1}{4}=(\square+\bigcirc)^2$;

c) $9x^2-\square+16=(\square-\bigcirc)^2$;　　d) $4x^2-\square+1=(\square-\bigcirc)^2$.

11. Demonstrați că este adevărată propoziția:

a) $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; b) $7+2\sqrt{6}=(1+\sqrt{6})^2$;

c) $11-6\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$; d) $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

12. Aflați greșeala.

Sofismul „$2\times 2=5$”.

Fie egalitatea adevărată $16-36=25-45$. Adunând la ambii membri ai egalității $\frac{81}{4}$, obținem $16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$

sau $16-2\cdot\frac{9}{2}\cdot 4+\frac{81}{4}=25-2\cdot\frac{9}{2}\cdot 5+\frac{81}{4}$.

De unde $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$ sau $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$. Deci, $4=5$ sau „$2\times 2=5$”.

13. Demonstrați că:

a) $198\mid(321^3-123^3)$; b) $111\mid(321^3+123^3)$.

14. Demonstrați că ultimele trei cifre ale numărului 2992^3+8^3 sunt zerouri.

15. Descompuneți în factori:

a) $a-b+b^2-a^2$; b) x^2-x-y^2-y; c) $x+y-x^3-y^3$; d) a^3-b^3+b-a.

16. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{2x-2}{x^3+1}$; b) $\frac{2x-1}{x^3-1}-\frac{x}{x-1}+1$.

17. Descompuneți în factori:

a) $64x^3-(x-1)^3$; b) $\frac{1}{8}t^3+(1+\frac{1}{2}t)^3$; c) $1-(z+1)^6$.

3

18. Demonstrați că:

a) $71\mid(8^8+8^7-8^6)$; b) $43\mid(7^{10}-7^9+7^8)$.

19. a) Arătați că diferența pătratelor a două numere impare consecutive este divizibilă cu 8.

b) Arătați că diferența pătratelor a două numere pare consecutive nu este divizibilă cu 8.

20. Scrieți ca sumă de pătrate expresia $x^2+y^2+x-4y+7\frac{1}{4}$.

21. Aflați $\left(a^{-6}+\frac{1}{a^{-6}}\right)^3$, dacă $a+\frac{1}{a}=5$,

• Problemă pentru campioni

22. Demonstrați că:

a) 83^4-83^3 este număr par; b) 37^4-37^3 este număr impar;

c) 53^7-53^6 este divizibil cu 26; d) 17^3-17^2 este pătrat perfect;

e) 79^6+79^5 este multiplul lui 80; f) 11^4+11^2 este multiplul numerelor 121 și 122.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

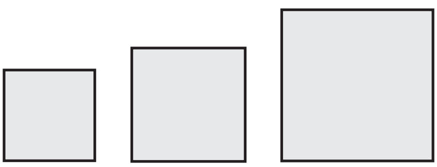
1. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: 1

$$36t^2 - \ldots + 4 = (\square - \bigcirc)^2.$$

2. Descompuneți în factori: 1

$$(x+1)^3 - (x-2)^3.$$

3. Aflați valoarea reală a lui x, astfel încât suma ariilor primelor două pătrate să fie egală cu aria pătratului al treilea: 2



4. Fie expresia: 3

$$E(x) = \frac{8x-16}{x^2+x+1} : \frac{x^2-4x+4}{x^3-1}.$$

a) Aflați DVA al expresiei $E(x)$.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Calculați $E\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) Determinați pentru care valori naturale ale lui x valoarea lui $E(x)$ este un număr natural.

5. Demonstrați că numărul $4^{2n} + 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, este pătrat perfect. 3

Varianta 2

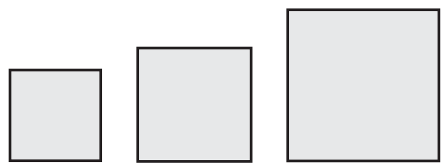
1. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$9 + \ldots + 25z^4 = (\square + \bigcirc)^2.$$

2. Descompuneți în factori:

$$(y-3)^3 + (y+1)^3.$$

3. Aflați valoarea reală a lui x, astfel încât suma ariilor primelor două pătrate să fie egală cu aria pătratului al treilea:



4. Fie expresia:

$$E(x) = \frac{2x^3+2}{x^2+6x+9} : \frac{x^2-x+1}{x+3}.$$

a) Aflați DVA al expresiei $E(x)$.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Calculați $E\left(-\frac{1}{2}\right)$.

d) Determinați pentru care valori naturale ale lui x valoarea lui $E(x)$ este un număr natural.

5. Demonstrați că numărul $4^{n} - 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, este pătrat perfect.

4 capitolul Ecuații și inecuații. Sisteme

§1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

1.1. Ecuații cu o necunoscută

1 Andrei avea pe contul telefonului său mobil 12 lei. După reîncărcare, în cont sunt 72 de lei. Cu câți lei şi-a reîncărcat contul Andrei, dacă pentru fiecare suplinire a contului el primeşte suplimentar 20% din valoarea de reîncărcare?

Rezolvăm

Fie contul a fost completat cu x lei. Atunci, pe cont vor fi:

$$\boxed{12+x+0{,}2x=72} \Leftrightarrow x+0{,}2x=72-\boxed{} \Leftrightarrow \boxed{}\,x=\boxed{} \Leftrightarrow x=\boxed{}.$$

Răspuns: $\boxed{}$ lei.

Definiție. Egalitatea de forma $A(x)=B(x)$, unde $A(x)$ şi $B(x)$ sunt expresii ce conțin necunoscuta x, se numeşte **ecuație cu o necunoscută**.

$x^2+2x-3=0$ $\qquad 5-x=2x+14$ $\qquad \dfrac{x}{|x|}=1$ $\qquad \sqrt{x}+5=0$

- Valoarea x_0 care transformă ecuația $A(x)=B(x)$ într-o propoziție adevărată se numeşte **soluție** a acestei ecuații.
- A **rezolva ecuația** înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.
- Mulțimea soluțiilor ecuației se notează, de regulă, cu S.

La rezolvarea ecuațiilor se aplică ***relațiile de egalitate în mulțimea*** $\mathbb{R}$:

Dacă $a=b,\ a,b\in\mathbb{R}$, atunci:

1° $a+c=b+c,\ c\in\mathbb{R}$; $\qquad$ 2° $a-c=b-c,\ c\in\mathbb{R}$;

3° $ac=bc,\ c\in\mathbb{R}^*$; $\qquad$ 4° $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c},\ c\in\mathbb{R}^*$.

Examinați şi completați:

$x^2+2x-3=0$

- $x=-3$: $(-3)^2+2\cdot(-3)-3=0$ – $\boxed{A}$
  $x=-3$ – soluție a ecuației.
- $x=1$: $\square^2+2\cdot\square-3=0$ – $\boxed{A}$
  $x=1-$ $\square$

O ecuație cu o necunoscută, în mulțimea indicată, poate să nu aibă soluții; poate să aibă o mulțime finită sau infinită de soluții.

2 Examinați şi formulați exemple de ecuații pentru fiecare dintre următoarele cazuri:

Nu are soluții în $\mathbb{R}$.		Are o mulțime infinită de soluții în $\mathbb{R}$.		Are o mulțime finită de soluții în $\mathbb{R}$.	
$\sqrt{x}+5=0$		$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$		$5-x=2x+4$	
$S=\varnothing$	$S=\varnothing$	$S=\mathbb{R}_+^*$	$S=\square$	$S=\{\square\}$	$S=\{\square\}$

Definiție. Ecuațiile se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Pentru a obține ecuații echivalente, se aplică următoarele transformări:

- Trecerea termenilor dintr-un membru al ecuației în celălalt, schimbându-le semnele în opuse.
- Reducerea termenilor asemenea în ambii membri ai ecuației.
- Înmulțirea/împărțirea ambilor membri ai ecuației cu/la un număr real nenul.

$$5-x=2x+14 \Leftrightarrow -2x-x=-5+14 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3$$

Definiție. **Domeniul valorilor admisibile (DVA)** al ecuației cu o necunoscută se numeşte mulțimea valorilor necunoscutei pentru care au sens toate expresiile conținute în ambii membri ai acestei ecuații.

$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$	$x^2+2x-3=0$	$\sqrt{x}+5=0$
DVA: $x\in\mathbb{R}^*$	DVA: $x\in\square$	DVA: $x\in\square$

1.2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

1 În SUA, pentru măsurarea temperaturii se utilizează scara Fahrenheit, iar în Europa – scara Celsius. Formula de trecere de la o scară la alta este următoarea:

$$t_F = 1{,}8\, t_C + 32.$$

Aflați temperatura după scara Celsius, dacă pe scara Fahrenheit termometrul indică 68°F.

Rezolvăm

Fie pe scara Celsius termometrul indică x°C. Atunci,

$$1{,}8x + 32 = 68 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{1{,}8x - 36 = 0}}_{\text{ecuație de gradul I cu o necunoscută}} \Leftrightarrow 1{,}8x = \boxed{} \Leftrightarrow x = \boxed{}.$$

Răspuns: $\boxed{}$ °C.

Definiție. Ecuația de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Ecuația de gradul I cu o necunoscută are o unică soluție: $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

2 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $-3(x-1) + 5x - 4 = 2x$.

$ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$	$a \neq 0$, $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
$a = 0$	
$b = 0$, $S = \mathbb{R}$	$b \neq 0$, $S = \varnothing$

Rezolvăm

$-3(x-1) + 5x - 4 = 2x \Leftrightarrow$

$-3x + 3 + 5x - 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$x(-3 + 5 - 2) = 4 - 3$

$0 \cdot x = 1$ – ecuația nu are soluții.

Răspuns: Ecuația nu are soluții.

Exerciții și probleme

1

1. Arătați că numărul –2 este soluție a ecuației: a) $4x + 5 = x - 1$; b) $x^2 - 4 = 0$.

2. Care dintre numerele-elemente ale mulțimii $M = \left\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2\frac{1}{4}\right\}$ sunt soluții ale ecuației:

a) $\dfrac{9}{11}x + 8 = 8$; b) $\dfrac{x+3}{2} = 2$; c) $\sqrt{x} = \dfrac{3}{2}$;

d) $2(x+7) - 15 = 2x - 1$; e) $x \cdot (x+2) = 0$?

3. Determinați ecuațiile de gradul I din exercițiul **2**.

4. Aflați DVA al ecuației:

a) $\frac{2-x}{x}=3$; b) $x^2-1=0$; c) $\sqrt{x}+2=6$; d) $3x+5=x+1$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3-6x=2-4x$; b) $2x+(3-6x)=-17$; c) $2(x+1)=3(x-1)$;

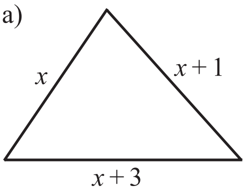
d) $\frac{1}{5}(2x-1)=4$; e) $\frac{2}{3}(4x-\frac{1}{3})=\frac{1}{9}$; f) $2(x+1)=4-(1-2x)$.

6. Rezolvați ecuația $\sqrt{3}x+2=8$: a) în mulțimea $\mathbb{R}$; b) în mulțimea $\mathbb{Q}$.

7. Rezolvați ecuația $\frac{x}{2}-\frac{3}{5}=0$: a) în mulțimea $\mathbb{Q}$; b) în mulțimea $\mathbb{Z}$.

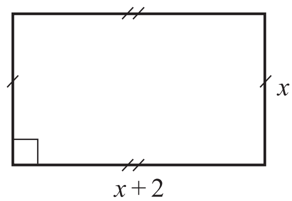
8. Aflați x utilizând datele din desen:

a)



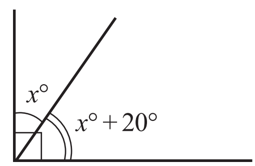
$\mathscr{P}=34$ cm

b)



$\mathscr{P}=16$ cm

c)



9. Asociați fiecare afirmație cu ecuația respectivă.

Model: 1) → b)

1) Numărul 12 este de 3 ori mai mare decât numărul x.
2) Media aritmetică a numerelor x și 11 este egală cu 25.
3) Numărul x este de 4 ori mai mare decât numărul 18.
4) Peste 4 ani Petru va avea 18 ani.
5) O latură a dreptunghiului este de 11 cm, iar perimetrul lui – de 25 cm.

a) $\frac{x}{4}=18$.
b) $3x=12$.
c) $(x+11)\cdot 2=25$.
d) $\frac{x+11}{2}=25$.
e) $x+4=18$.

10. Examinați și continuați rezolvarea:

a) $2(x-3)+4=8 \Leftrightarrow 2(x-3)=8-4 \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow x=\underline{\quad}$.

b) $6-0{,}5(1-x)=2 \Leftrightarrow 0{,}5(1-x)=\underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow x=\underline{\quad}$.

□ **2** □

11. Pentru care valori reale ale variabilei x valoarea expresiei $25x-30$ este cu 5 mai mare decât valoarea expresiei $15x+35$?

12. Pentru care valori reale ale variabilei y valoarea expresiei $4y+6$ este de 6 ori mai mare decât valoarea expresiei $6y-15$?

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $5(3x-6)+4(3-2x)=5x-8$; b) $9(x-3)-4(7-3x)=5-3x$;

c) $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)=1$; d) $\frac{15-x}{6}-\frac{2x+16}{5}=1$;

e) $\frac{5}{12}+\frac{x}{6}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$; f) $\frac{x-1}{5}+\frac{x-2}{3}=2-\frac{x-2}{15}$;

g) $5-x\sqrt{5}=3-x\sqrt{3}$; h) $(x-1)\cdot\sqrt{2}=2x-1$.

14. Compuneți o ecuație cu o necunoscută, care are mulțimea soluțiilor:

a) $S=\{4\}$; b) $S=\{-3\}$; c) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; d) $S=\{\sqrt{5}\}$; e) $S=\{\sqrt{3}-1\}$; f) $S=\varnothing$; g) $S=\mathbb{R}$.

15. Este oare numărul 1,5 soluție a ecuației:

a) $x-1=|1-x|$; b) $3-x=|-x|$; c) $|-x|+1{,}5=0$?

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x|+1=5$; b) $3|x|+7=22$; c) $2|x|-1=|x|+6$;

d) $5|x|-2=3|x|+4$; e) $|x-3|=0$; f) $|x+1|=-2$.

17. Dacă pe un taler al balanței se va pune o cărămidă, atunci, pentru ca balanța să fie în echilibru, pe celălalt taler se vor pune greutatea de 1 kg şi încă o jumătate de cărămidă. Cât cântăreşte o cărămidă?

18. O barcă cu motor parcurge o distanță în sensul cursului apei în 6 ore, iar la întoarcere, împotriva curentului apei, parcurge aceeaşi distanță în 10 ore. Aflați viteza apei, dacă viteza bărcii pe lac este de 16 km/h.

□ □ **3**

19. Pentru care valori ale parametrului real a ecuația are mulțimea soluțiilor S:

a) $ax=-0{,}2,\ S=\{5\}$; b) $ax+6=0,\ S=\{-2\}$;

c) $ax+5=12,\ S=\varnothing$; d) $2x+a=3,\ S=\{1\}$?

20*. Ştiind că ecuațiile $5x=a-3$ şi $2x-7=1$ sunt echivalente, aflați valoarea parametrului real a.

21. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|2x-3|=7$; b) $\sqrt{(7-2x)^2}=1$; c) $|3(x-1)-1|=2$;

d) $\sqrt{16x^2-8x+1}=3$; e) $|3x+1|-4(1+|3x+1|)=5$; f) $|11-x|=x-11$.

22*. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația, unde m este un parametru real:

a) $m-2x=3m$; b) $mx=5$; c) $mx=2m$;

d) $mx-1=2x$; e) $2mx+2m=-4m$; f) $mx+x=m^2-1$.

23. Sergiu parcurge cu bicicleta distanța dintre două sate în 36 de minute, iar Eugeniu – în 45 de minute. Viteza cu care se deplasează Sergiu este cu 4 km/h mai mare decât viteza cu care se deplasează Eugeniu. Aflați viteza fiecărui biciclist şi distanța dintre sate.

24. Andrei a cheltuit la supermarket $\frac{2}{7}$ din toți banii pe care i-a avut, iar 30% din rest – la librărie. Câți bani a avut Andrei, dacă i-au rămas 175 de lei?

25. Compuneți o problemă a cărei rezolvare se reduce la rezolvarea ecuației:

a) $3x=x+20$; b) $\frac{x}{16}+1=\frac{x}{12}$; c) $(x+2)4=(x-2)6$; d) $x-0{,}2=320$.

§2. Sisteme de ecuații de gradul I

2.1. Ecuații cu două necunoscute

La un maraton intelectual, echipele rezolvă probleme de matematică şi de fizică. Pentru fiecare problemă de fizică rezolvată corect echipa obține 3 puncte, iar pentru fiecare problemă de matematică rezolvată corect – 4 puncte. Se poate determina în mod univoc câte probleme de fizică şi câte de matematică a rezolvat echipa, dacă ea a acumulat în total 39 de puncte?

Explicăm

Fie au fost rezolvate corect x probleme de fizică şi y probleme de matematică. Atunci, obținem ecuația

$\boxed{3x+4y=39}$ ← ecuație cu două necunoscute

Definiție. **Soluție a ecuației cu două necunoscute** se numeşte perechea ordonată de numere $(x_0;\ y_0)$ care transformă această ecuație într-o propoziție adevărată.

$3x+4y=39$

Soluție a ecuației → $(1;\ 9)$ $3\cdot 1+4\cdot 9=39$ – A

$(5;\ 6)$ $3\cdot\square+4\cdot\square=39$ – $\square$

$(13;\ 1)$ $3\cdot\square+4\cdot\square=39$ – $\square$

$(\square;\ \square)$ $3\cdot\square+4\cdot\square=39$ – $\square$

A/F

Ecuație cu două necunoscute

- $2x+5y=10$: $(-2;\ 2{,}8)$, $(0;\ \square)$, $(\square;\ -2)$
- $x^2+y=5$: $(-3;\ \square)$, $(\square;\ 5)$
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$: $(3;\ \square)$, $(\square;\ 1)$
- $xy=-1$: $\left(-\frac{1}{3};\ \square\right)$, $(\square;\ -1)$

Ecuația cu două necunoscute poate să nu aibă soluții; poate să aibă o mulțime finită sau infinită de soluții.

Nu are soluții.		Are o mulțime finită de soluții.		Are o mulțime infinită de soluții.	
$\|x\|+\|y\|=-2$		$x^2+y^2=0$		$x-y=1$	

Definiție. Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuației cu două necunoscute se numește mulțimea valorilor necunoscutelor pentru care au sens toate expresiile din această ecuație.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \quad \rightarrow \quad \text{DVA: } x\in\mathbb{R}^*,\ y\in\mathbb{R}^*.$$

2.2. Ecuații de gradul I cu două necunoscute

1 Anişoara doreşte să cumpere cu 30 de lei mere la prețul de 4 lei/kg şi pere la prețul de 5 lei/kg. Câte kilograme de mere şi câte kilograme de pere poate cumpăra Anişoara?

Explicăm

Fie Anişoara poate cumpăra x kg de mere şi y kg de pere. Atunci, obținem ecuația:

coeficienții necunoscutelor

$$\boxed{4x+5y=30}$$

termenul liber

necunoscutele

Definiție. Ecuația de forma $ax+by+c=0$, $a, b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$, se numeşte **ecuație de gradul I cu două necunoscute**.

- Ecuația de gradul I cu două necunoscute are o mulțime infinită de soluții.
- Pentru a afla soluția ecuației de gradul I cu două necunoscute, se atribuie uneia dintre necunoscute orice valoare şi apoi se află valoarea corespunzătoare a celeilalte necunoscute.

• Determinați câteva soluții ale ecuației obținute $4x+5y=30$.

Examinați şi continuați:

$4x+5y=30 \Leftrightarrow 5y=30-4x \Leftrightarrow y=6-0,8x.$

Pentru $x = 5$ obținem $y = 6 - 0{,}8 \cdot 5 \Leftrightarrow y = 2$; $(5; 2)$
Pentru $x = 1{,}5$ obținem $y = 6 - 0{,}8 \cdot \square \Leftrightarrow y = \square$; $(1{,}5; \square)$ soluțiile ecuației
Pentru $x = 0$ obținem $y = 6 - 0{,}8 \cdot \square \Leftrightarrow y = \square$. $(0; \square)$

• Care poate fi răspunsul la întrebarea problemei?

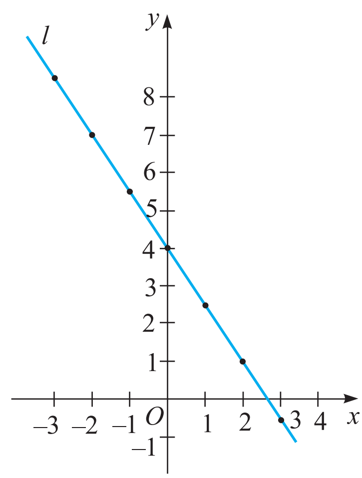
2 Să rezolvăm ecuația $3x + 2y = 8$ în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Explicăm

$3x + 2y = 8 \Leftrightarrow 2y = 8 - 3x \Leftrightarrow y = 4 - 1{,}5x$.

Completăm tabelul:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$8{,}5$	7	$5{,}5$	4	$2{,}5$	1	$-0{,}5$



Reprezentăm în sistemul de axe ortogonale punctele ale căror coordonate sunt soluții ale ecuației date.

Punctele corespunzătoare soluțiilor ecuației $3x + 2y = 8$ sunt situate pe dreapta l şi invers: dacă punctul aparține dreptei l, atunci coordonatele lui reprezintă o soluție a ecuației $3x + 2y = 8$.

Dreapta l se numeşte ***graficul ecuației*** sau ***dreapta soluțiilor ecuației*** $3x + 2y = 8$.

> Graficul ecuației de gradul I cu două necunoscute $ax + by = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, coincide cu graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$.

Numărul $-\frac{a}{b}$ se numeşte ***panta*** (sau ***coeficientul unghiular*** al) dreptei – $ax + by = c$.

2.3. Noțiunea de sistem de două ecuații cu două necunoscute

1 Claviatura unui pian are 88 de clape, clape albe fiind cu 16 mai multe decât negre.
Câte clape albe şi câte clape negre are pianul?

Explicăm

Fie x numărul de clape albe, iar y – numărul de clape negre.
Atunci, obținem ecuațiile $x + y = 88$ şi $x - y = 16$.

$(x_0;\ y_0)$

Pentru a rezolva problema, trebuie să găsim perechea de numere $(x_0;\ y_0)$ – soluția comună a ambelor ecuații. În acest caz, se spune că avem de rezolvat un sistem de două ecuații cu două necunoscute și se scrie:

$$\boxed{\begin{cases} x+y=88 \\ x-y=16 \end{cases}}$$

prima ecuație a sistemului

ecuația a doua a sistemului

semnul sistemului

sistemul de două ecuații cu două necunoscute

Soluție comună a ambelor ecuații este perechea de numere $(52;\ 36)$, deoarece

$$52+36=88 \ \text{– Adevărat;}$$

$$52-36=16 \ \text{– Adevărat.}$$

Răspuns: 52 de clape albe și 36 de clape negre.

Definiție. **Soluție a sistemului de ecuații cu două necunoscute** se numește perechea ordonată de valori ale necunoscutelor pentru care fiecare ecuație a sistemului se transformă într-o propoziție adevărată.

2 Decideți dacă perechea de numere $(-2;\ 1)$ este soluție a sistemului de ecuații:

a) $\begin{cases} -x+y=3, \\ 3x-y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=-3, \\ -x+3y=-5. \end{cases}$

Explicăm

$-(-2)+1=3$ – A

$3\cdot(-2)-1=1$ – F

Răspuns: $(-2;\ 1)$ nu este soluție a sistemului de ecuații.

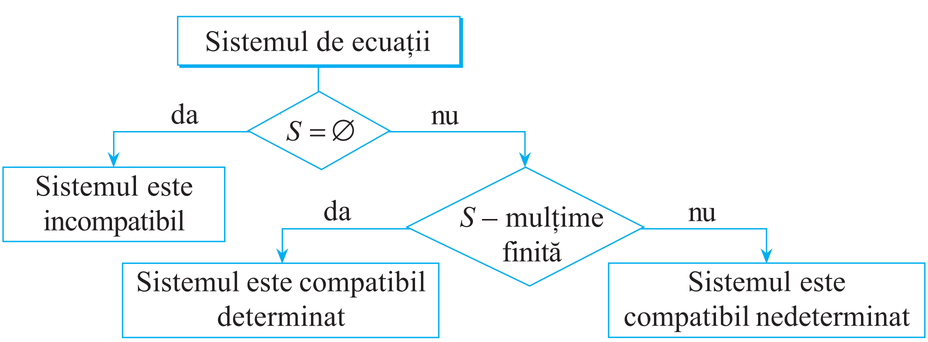
$2\cdot \square + \square = -3$ – $\square$

$-\square + 3\cdot \square = 1$ – $\square$

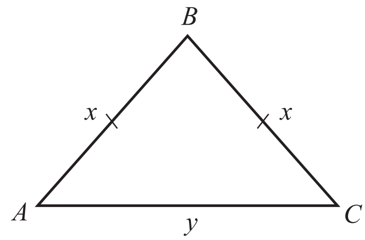
Răspuns: $(-2;\ 1)$ – $\square$.

Definiție. **A rezolva sistemul de ecuații** înseamnă a afla mulțimea soluțiilor lui.

- Mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații se notează, de regulă, cu S.
- Sistemul de ecuații poate să nu aibă soluții; poate să aibă o mulțime finită sau o mulțime infinită de soluții.



2.4. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute



Laturile congruente ale unui triunghi isoscel sunt cu 11 cm mai lungi decât baza lui. Aflați lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul lui este de 40 cm.

Rezolvăm

Alcătuim sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x - y = 11 \\ 2x + y = 40 \end{cases}$$

$(17; 6)$ ← soluția sistemului de ecuații

Răspuns: $AB = \square$ cm; $BC = \square$ cm; $AC = \square$ cm.

• Explicați cum a fost compus sistemul de ecuații.

Definiție. Sistemul de forma $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$ unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sunt numere reale, se numeşte **sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute**.

Pentru a rezolva sistemul de ecuații, de regulă, se trece la un alt sistem de ecuații, mai simplu, echivalent cu cel dat.

Definiție. Sistemele de ecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Pentru a obține sisteme echivalente, se aplică următoarele transformări:

Schimbarea ordinii ecuațiilor într-un sistem.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu altă ecuație, echivalentă cu cea inițială.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 5x = 2 + 3y \end{cases}$$

Exprimarea într-o ecuație a sistemului a unei necunoscute prin cealaltă şi substituirea acestei expresii în cealaltă ecuație a sistemului.

$$\begin{cases} -7x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 7x \\ x + 2\cdot(2 + 7x) = 3 \end{cases}$$

Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu altă ecuație, care se obține adunând sau scăzând două ecuații ale sistemului (înmulțite, dacă e cazul, cu un număr nenul).

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 4x = 7 \end{cases}$$

2.5. Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

2.5.1. Metoda substituției

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\boxed{1-2y} \\ 2\cdot\boxed{(1-2y)}-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 2-4y-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

substituim

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ -7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2\cdot 1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$$

> Dintr-o ecuație exprimăm o necunoscută prin cealaltă şi o substituim în cealaltă ecuație.

Răspuns: $S=\{(-1;\,1)\}$.

• Examinați şi continuați rezolvarea:

$$\begin{cases} -3x+y=-1 \\ 5x+2y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\boxed{} \\ 5x+2\cdot\boxed{()}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\boxed{} \\ \square\ x=\square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square, \\ y=\square. \end{cases}$$

substituim

Răspuns: $S=\{(\square;\,\square)\}$.

2.5.2. Metoda reducerii

$$\left.\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 4x+3y=25 \end{cases}\right|\oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 6x=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 2\cdot 4-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ -3y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

> Adunăm cele două ecuații ale sistemului.

Răspuns: $S=\{(4;\,3)\}$.

Examinați şi continuați rezolvarea:

$$\begin{cases} 4x+2y=1 \\ 3x+y=1 \quad |\otimes(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 4x+2y=1 \\ -6x-2y=-2 \end{cases}\right|\oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=1 \\ \square\ x=\square \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\square \\ 4\cdot\square+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square \\ 2y=\square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square, \\ y=\square. \end{cases}$$

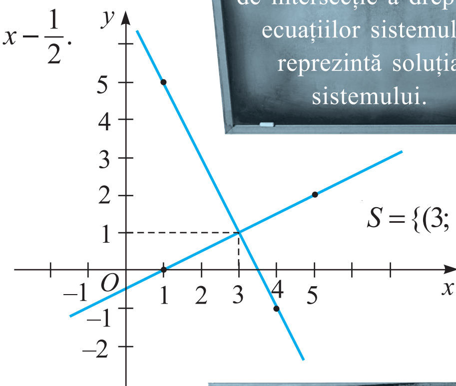
Răspuns: $S=\{(\square;\,\square)\}$.

2.5.3. Metoda grafică

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 7 \\ -2y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 7, \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

x	1	4
$y = -2x + 7$	5	-1

x	1	5
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	0	2



$S = \{(3;\ 1)\}$.

Coordonatele punctului de intersecție a dreptelor ecuațiilor sistemului reprezintă soluția sistemului.

Dacă dreptele coincid, atunci toate punctele lor (adică coordonatele lor) sunt soluții.
Dacă dreptele sunt paralele, atunci sistemul nu are soluții.

LUCRARE PRACTICĂ

I. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

Câte soluții are fiecare sistem?

Aflați rapoartele coeficienților necunoscutelor x și y și comparați rapoartele obținute.

a) $\frac{1}{3} \bigcirc \frac{1}{1}$ b) $\frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square}$

Trageți concluzia.

II. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = -2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 6y = -3, \\ 4x + 8y = 2. \end{cases}$

Câte soluții are fiecare sistem?

Aflați raportul coeficienților necunoscutelor x și y și al termenilor liberi și comparați rapoartele obținute.

a) $\frac{1}{2} \bigcirc \frac{-1}{-2} \bigcirc \frac{2}{-2}$ b) $\frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square}$

Trageți concluzia.

III. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 10, \\ 3x - 6y = 15. \end{cases}$

Câte soluții are fiecare sistem?

Aflați raportul coeficienților necunoscutelor x și y și al termenilor liberi și comparați rapoartele obținute.

a) $\frac{2}{4} \bigcirc \frac{-1}{-2} \bigcirc \frac{1}{2}$ b) $\frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square}$

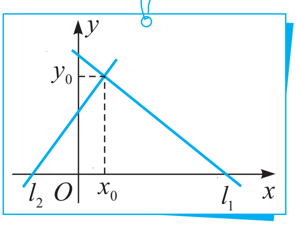
Trageți concluzia.

Comparați concluziile cu următoarea schemă:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

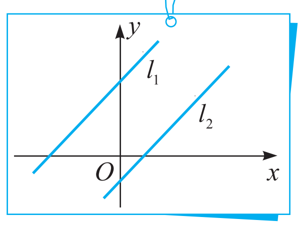
$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}^*,\quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

are o soluție → Sistemul este compatibil determinat. → $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$



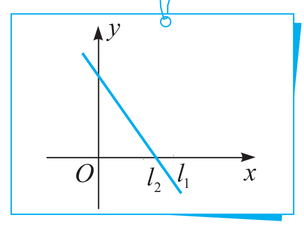
$S=\{(x_0;\ y_0)\}$

nu are soluții → Sistemul este incompatibil. → $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$



$S=\varnothing$

are o mulțime infinită de soluții → Sistemul este compatibil nedeterminat. → $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$



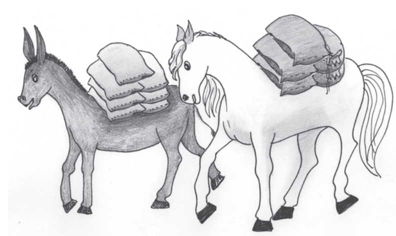
$S=\{(x;\ y)\}$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y=-\dfrac{a_1}{b_1}x-\dfrac{c_1}{b_1}$

2.6. Rezolvarea unor probleme cu ajutorul sistemelor de ecuații de gradul I cu două necunoscute

Calul şi măgarul mergeau pe un drum, fiecare cu o povară grea în spate. Calul se plângea de povara sa.

– De ce te plângi? l-a întrebat măgarul. Dacă eu am să iau de la tine un sac, atunci povara mea va deveni de două ori mai grea decât a ta. Dacă însă tu vei lua un sac de pe spatele meu, atunci povara ta va fi egală cu a mea.

Câți saci ducea calul şi câți saci ducea măgarul?



	În limbaj matematic
Calul şi măgarul mergeau ducând poveri grele.	Calul ducea x saci, iar măgarul – y saci.
Dacă măgarul va lua un sac de pe spinarea calului, atunci povara lui va deveni de două ori mai grea decât cea a calului.	$2(x-1)=y+1$
Dacă însă calul va lua un sac de pe spinarea măgarului, atunci poverile lor vor fi egale.	$x+1=y-1$

Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}2(x-1)=y+1\\x+1=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=3\\x-y=-2\end{cases}\Bigg|\ominus\ \Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=3\\x=\square\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\square,\\y=\square.\end{cases}$$

Răspuns: Calul ducea $\square$ saci, iar măgarul – $\square$ saci.

Exerciții și probleme

1

1. Este soluție a ecuației $x+3y=9$ perechea de numere:
a) (1; 1); b) (6; 1); c) (0; 3); d) (–4; 4)?

2. Aflați trei soluții ale ecuației:
a) $x+y=6$; b) $x+2y=5$; c) $3x-y=2$; d) $3x+2y=10$.

3. Medicii au stabilit că, pentru a se dezvolta normal, copilul sau adolescentul cu vârsta de x ani $(1\le x\le 18)$ trebuie să doarmă zilnic y ore, unde $y+\frac{x}{2}=17$.
Determinați câte ore pe zi trebuie să dormiți voi, surorile sau frații voștri mai mici.

4. Din ecuația $2x+y=5$ exprimați:
a) necunoscuta y prin necunoscuta x;
b) necunoscuta x prin necunoscuta y.

5. Exprimați necunoscuta y prin necunoscuta x și aflați două soluții ale ecuației:
a) $x-y=7$;
b) $2x+y=5$;
c) $5x-2y=10$.

Model:
$3x+y=15 \Leftrightarrow y=-3x+15$
$x=0;\ y=-3\cdot 0+15 \Leftrightarrow y=15.$
$x=-1;\ y=-3\cdot(-1)+15 \Leftrightarrow y=18.$
$(0;\ 15)\quad(-1;\ 18).$

6. Graficul ecuației $8x-5y=17$ trece prin punctul de abscisă 2. Aflați ordonata acestui punct.

7. Construiți graficul ecuației:
a) $x+y=6$; b) $3x-y=0$; c) $2x-y=1$.

8. Determinați dacă este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases}3x+2y=19\\x+5y=15\end{cases}$ perechea de numere:
a) (2; 5); b) (0; 3); c) (5; 2); d) $(6;\ \frac{1}{2})$.

9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale prin metoda substituției sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}x-y=2,\\2x-3y=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-y=-4,\\x+2y=8;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+y=6,\\3x-5y=2;\end{cases}$ d) $\begin{cases}2y-x=-3,\\3y-2x=-7.\end{cases}$

10. Rezolvați în mulțimea numerelor reale prin metoda reducerii sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}4x-y=-1,\\2x+y=13;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=4,\\3x+y=6;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-y=-5,\\-x+3y=19;\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x+2y=19,\\x+5y=15.\end{cases}$

11. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ 2x-y=-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-2x=1, \\ 6x-y=7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=2, \\ -2x+y=-4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ 6x+2y=1. \end{cases}$

12. Numiți o soluție, dacă există, a ecuației:

a) $xy=0$; b) $2x^2+y^2=0$; c) $x^2+y^2=4$; d) $|x|+|y|+1=0$.

13. Perechea de numere $(3; 2)$ este soluție a ecuației $2x+by=12$, $b\in\mathbb{R}$. Aflați numărul b.

14. Perechea de numere $(2; 1)$ este soluție a ecuației $ax+2y=8$, $a\in\mathbb{R}$. Aflați numărul a.

15. Scrieți o ecuație de gradul I cu două necunoscute a cărei soluție este perechea de numere:

a) $(1; 2)$; b) $(-3; 1)$; c) $(0; -2)$; d) $(5; 7)$.

16. Reprezentați, în același sistem de axe ortogonale, graficele ecuațiilor:

a) $x+y=3$ și $x-y=1$; b) $x-y=-2$ și $x-y=2$.

Au aceste ecuații soluții comune?

17. Rezolvați prin două metode sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x-5y=-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-4y=2, \\ 3x-2y=16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x-8y=-2, \\ 5x+2y=1{,}8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=0, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=10. \end{cases}$

18. Fără a rezolva sistemul de ecuații, determinați numărul de soluții ale acestuia și tipul sistemului:

a) $\begin{cases} 4x+y=2, \\ 3x-2y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-6y=6, \\ x-2y=3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+3y=4, \\ 4x+y=-5. \end{cases}$

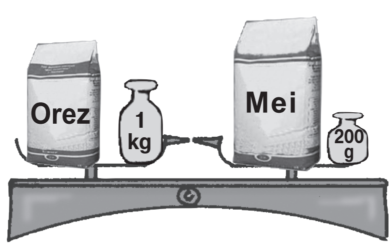
Model:

$\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 6x+4y=3; \end{cases}$ $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}\neq\frac{1}{3}.$

Sistemul nu are soluții, deci este incompatibil.

Rezolvați problemele alcătuind sisteme de ecuații.

19. Pe cântar sunt în total 4 kg de orez și mei. Utilizând datele din desen, determinați câte kilograme de orez și câte kilograme de mei sunt în pachetele respective.



20. Tata este cu 26 de ani mai în vârstă decât fiica, iar peste 4 ani el va fi de 3 ori mai în vârstă decât ea. Câți ani are tata și câți ani are fiica?

21. 42 de turiști au fost cazați în camere cu două și trei paturi. Au fost ocupate în total 16 camere. Câte camere cu două paturi și câte cu trei paturi au fost ocupate?

22. Un client a depus la o bancă 1200 de lei pe două conturi. Pe un cont banca dă o dobândă anuală de 8%, iar pe celălalt – de 10%. Peste un an suma s-a majorat cu 108 lei. Câți lei a depus clientul pe fiecare cont?

23. O firmă este formată din două filiale, al căror venit total în anul precedent a fost de 13 milioane de lei. Pentru anul curent este preconizată majorarea venitului sucursalei I cu 25%, iar al sucursalei II – cu 40%. Venitul total al firmei trebuie să constituie 17 milioane de lei. Aflați care a fost venitul fiecărei sucursale în anul precedent.

24. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{y-1}{2}, \\ 4x+5y=23; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-y-24=2(5x-2y), \\ 3y-2=4-(x-y); \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(3x-y)-5=2x-3y, \\ 5-(x-2y)=4y+16. \end{cases}$

3

25. Fie perechea de numere $(-2; 1)$. Scrieți încă două perechi de numere, astfel încât toate trei să fie soluții ale unei ecuații de gradul I cu două necunoscute.

26. Scrieți o ecuație de gradul I cu două necunoscute ale cărei soluții sunt valorile necunoscutelor x şi y din tabel:

a)

x	–1	0	1	4
y	3	2	1	–2

b)

x	–2	–1	0	1
y	–8	–4	0	4

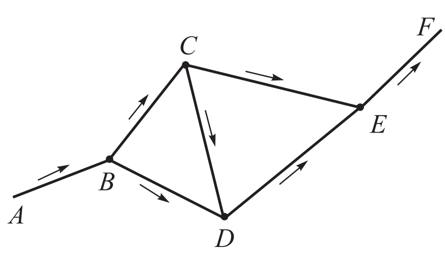
27. Aflați valorile parametrului real m pentru care sistemul de ecuații are o mulțime infinită de soluții:

a) $\begin{cases} 3x+my=3, \\ mx+3y=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+my=1, \\ mx-3my=2m+3. \end{cases}$

28. Pentru care valori ale parametrului real a sistemul de ecuații este incompatibil:

a) $\begin{cases} x+ay=1, \\ x-3y=2a+3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 16x+ay=4, \\ ax+9y=0? \end{cases}$

29. În desen este reprezentată schema unor autostrăzi, iar săgețile indică direcțiile circulației. Pe porțiunea AB a trecut o coloană auto formată din 36 de automobile. Se ştie că, dintre ele, în continuare, pe porțiunea BC au trecut cu 10 automobile mai multe decât pe porțiunea DE, iar pe porțiunea CD au trecut 2 automobile. Câte automobile din coloană au trecut pe fiecare dintre porțiunile BC, BD, DE şi CE?



30. O firmă este formată din două filiale, care, împreună, au avut anul trecut un venit de 13 milioane de lei. Pentru anul curent sunt planificate creşteri de venit al filialelor respective în mărime de 75% şi 140%. Astfel, venitul total al firmei se va dubla. Aflați venitul fiecărei filiale:
a) în anul trecut; b) planificat pentru anul curent.

31. Amestecând o soluție de acid clorhidric cu concentrația de 20% şi o soluție de acid clorhidric cu concentrația de 50%, s-au obținut 30 l de acid clorhidric cu concentrația de 40%. Ce cantități de fiecare fel de soluție au fost amestecate?

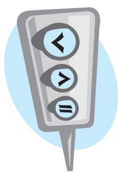
§3. Inecuații cu o necunoscută. Sisteme de inecuații cu o necunoscută

3.1. Inegalități numerice

1 Substituiți $\bigcirc$ cu unul dintre semnele >, <, astfel încât să obțineți inegalități numerice adevărate:

$\sqrt{5} \bigcirc 2$ $\quad$ $\pi \bigcirc 3{,}14$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \bigcirc 1$ $\quad$ $|7{,}2| \bigcirc |-8{,}1|$

2 Știind că $x < y,\ m < 0,\ x, y, m \in \mathbb{R}$, și utilizând proprietățile inegalităților numerice, comparați:



$x + m \bigcirc y + m$

$mx \bigcirc my$

$\frac{x}{m^2} \bigcirc \frac{y}{m^2}$

$|m| \cdot x \bigcirc |m| \cdot y$

$\frac{x}{m^5} \bigcirc \frac{y}{m^5}$

① Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a > b$, atunci $a + c > b + c$.

② Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $ac > bc$.

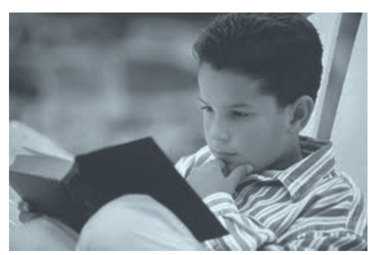
③ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_-^*$, atunci $ac < bc$.

④ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

⑤ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_-^*$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

3.2. Inecuații de gradul I cu o necunoscută

1 Vlad a promis că va citi zilnic cel puțin 10 pagini dintr-o carte. În prima zi el a citit cu 4 pagini mai puțin decât în ziua a doua, iar în a treia zi – de 1,5 ori mai multe pagini decât în ziua a doua.
De asemenea, numărul de pagini citite în ziua a treia este mai mare decât numărul de pagini citite în primele două zile. Și-a respectat Vlad promisiunea?



Rezolvăm

Fie în ziua a doua Vlad a citit x pagini, atunci, în prima zi el a citit $(x - 4)$ pagini, iar în ziua a treia – $1{,}5x$ pagini.

$$\boxed{1{,}5x > x + x - 4} \Leftrightarrow 1{,}5x > 2x - 4 \Leftrightarrow -0{,}5x > -4 \Leftrightarrow x < 8$$

Răspuns: Vlad ________ promisiunea.

Definiție. Inecuațiile de formele $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

Exemplu:

$2(x-5)>8$

$x=\boxed{15}$ – soluție a inecuației, deoarece

$2\cdot(15-5)>8$ – Adevărat

• Este numărul 7 soluție a acestei inecuații?

Definiție. **Soluție a inecuației cu o necunoscută** se numește valoarea necunoscutei care transformă această inecuație într-o inegalitate adevărată.

- A rezolva inecuația înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.
- Mulțimea soluțiilor inecuației se notează, de regulă, cu S.
- Mulțimea soluțiilor inecuației de gradul I cu o necunoscută se scrie ca un interval de numere.

Ne amintim

$x\geq a$

$S=[a; +\infty)$

$x<b$

$S=(-\infty; b)$

$a<x<b$

$S=(a; b)$

2 Examinați și completați:

a) $x>2$

$S=(2; +\infty)$

b) $x\leq 5$

$S=$

c) $-3\leq x<0$

$S=$

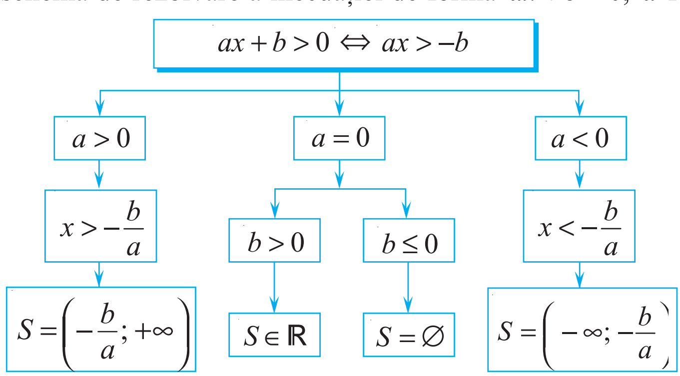
3 Rezolvăm în $\mathbb{R}$ inecuația:

$2(x-5)>8 \Leftrightarrow x-5>4 \Leftrightarrow x>9$

Răspuns: $S=(9; +\infty)$

Definiție. Două inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

4 Examinați schema de rezolvare a inecuației de forma $ax+b>0$, $a\in\mathbb{R}$.



• Utilizând schema din sarcina **4**, continuați rezolvarea în mulțimea $\mathbb{R}$:

a) $3x-6>4+5(x-4) \Leftrightarrow 3x-6>4+5x-20 \Leftrightarrow \square\, x > \square \Leftrightarrow x \bigcirc \square$.

Răspuns: $S = \square$.

b) $2(1-3x)>3(5-2x) \Leftrightarrow 2-6x>15-6x \Leftrightarrow \square\, x > \square \Leftrightarrow \square$.

Răspuns: $S = \square$.

• Compuneți scheme similare pentru rezolvarea inecuațiilor de formele $ax+b<0$; $ax+b \geq 0$; $ax+b \leq 0$.

3.3. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

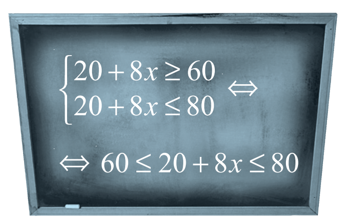
Într-un ceainic s-a turnat apă cu temperatura de 20°C şi s-a pus la încălzire. Peste fiecare minut temperatura apei se majora cu 8°C. Peste cât timp temperatura apei va fi de cel puțin 60°C şi de cel mult 80°C?

Rezolvăm

Fie x min. timpul necesar încălzirii respective. Atunci, obținem inecuațiile $20+8x \geq 60$ şi $20+8x \leq 80$.

Pentru a rezolva problema, trebuie să aflăm soluțiile comune ale acestor inecuații (intersecția mulțimilor soluțiilor lor).

În acest caz, se spune că avem de rezolvat un sistem de două inecuații cu o necunoscută şi se scrie:



$$\boxed{\begin{cases} 20+8x \geq 60 \\ 20+8x \leq 80 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x \geq 40 \\ 8x \leq 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 7{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 7{,}5.$$

Răspuns: Cel puțin 5 min. şi cel mult 7,5 min.

- Forma generală a sistemului de două inecuații de gradul I cu o necunoscută este:

$$\begin{cases} a_1x+b_1 \geq 0,\ a_1 \in \mathbb{R}^*,\ b_1 \in \mathbb{R}, \\ a_2x+b_2 \geq 0,\ a_2 \in \mathbb{R}^*,\ b_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Sistemul de inecuații poate fi format din inecuații ce conțin oricare dintre semnele $<, \leq, >, \geq$.

Definiție. Soluție a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută se numeşte valoarea necunoscutei care transformă fiecare inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată.

- A rezolva sistemul de inecuații înseamnă a afla mulțimea soluțiilor lui.
- Mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații se notează, de regulă, cu S şi este intersecția mulțimilor soluțiilor inecuațiilor sistemului.

1 Examinați şi completați:

1) $\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Răspuns: $S = (3; +\infty)$.

2) $\begin{cases} x < -1 \\ x \geq 2. \end{cases}$

Sistemul nu are soluții reale.

Răspuns: $S = \varnothing$.

3) $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5.$

Răspuns: $S = \square$.

4) $\begin{cases} x < 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \bigcirc \square.$

Răspuns: $S = \square$.

2 Examinați modelul şi continuați rezolvarea sistemului de inecuații:

$$\begin{cases} 8x - 9 < 6x - 3 \\ 2 - x > 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \square\, x < \square \\ \square\, x > \square \end{cases} \Leftrightarrow$$

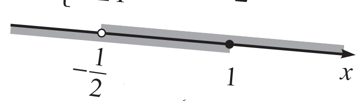
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \bigcirc \square \\ x \bigcirc \square \end{cases} \Leftrightarrow \square.$$

Răspuns: $S = \square$.

Model:

$$\begin{cases} 3 - 4x < 5 \\ 6 + 9x \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x < 2 \\ 9x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 1.$$



Răspuns: $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Exerciții şi probleme

1

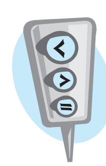
1. *Adevărat* sau *Fals?*

$2\sqrt{2} > 3$ $\quad$ $1,(2) < 1,215$ $\quad$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} > 3^{-1}$ $\quad$ $\sqrt{7} < \pi$ $\quad$ $2^3 < 3^2$

2. Se ştie că $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a > b$. Comparați:

$\frac{a}{b} \bigcirc \frac{b}{3}$; $\qquad -a \bigcirc -b$; $\qquad a - 15 \bigcirc b - 15$;

$0,01a \bigcirc 0,01b$; $\qquad \frac{a}{-5} \bigcirc \frac{b}{-5}$; $\qquad b - a \bigcirc 0$.



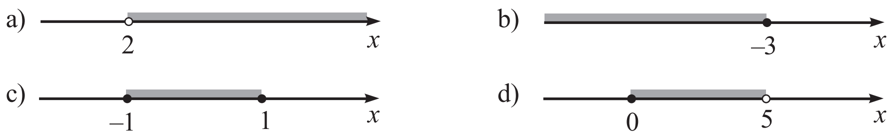
3. Scrieți trei numere ce aparțin intervalului: a) $(50; +\infty)$; b) $(-\infty; -3]$; c) $[1; 2)$.

4. Scrieți toate numerele întregi ce aparțin intervalului:

a) $[-1,2; 0,3)$; b) $\left[\frac{3}{13}; \frac{13}{3}\right)$; c) $(\sqrt{3}; \pi]$.

5. Care dintre numerele $\boxed{-2}$, $\boxed{3,5}$, $\boxed{0}$, $\boxed{5}$, $\boxed{\sqrt{10}}$ sunt soluții ale inecuației $3x+5>15$?

6. Scrieți inecuația și intervalul de numere care corespund reprezentării:



7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $5x-2\geq 13$; b) $8-4x>-32$; c) $2(1-x)\geq 4(3x+2)$; d) $2-3(x+2)\leq 5-2x$.

8. Determinați dacă numerele -1; 0; 1; 15 sunt soluții ale sistemului de inecuații:

a) $\begin{cases} x>-4, \\ x<8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-5>0, \\ x-14>0. \end{cases}$

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} -3x>9, \\ 4x<1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x+1\geq -5, \\ 2-3x<5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3-4x>5, \\ 6+9x\leq 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-6>2x, \\ 2x-6>5x; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+1\leq 13, \\ 9-2x<x. \end{cases}$

2

10. Împărțiți ambii membri ai inecuației $x<-6$ la: a) 4; b) –4; c) $\frac{1}{3}$; d) –3.

11. Se știe că $-3<a<2$. Completați:

a) $\square < 2a < \square$; b) $\square < \frac{a}{2} < \square$; c) $\square < a-1 < \square$;

d) $\square < -3a < \square$; e) $\square < 2-a < \square$.

12. Compuneți o inecuație cu mulțimea soluțiilor:

a) $S=[-1; +\infty)$; b) $S=(-\infty; 2)$; c) $S=[-3; 1]$; d) $S=(0; 2]$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{3x-7}{6}\geq\frac{5-6x}{4}$; b) $\frac{x-1}{4}+\frac{x+3}{2}<1-\frac{x}{6}$; c) $(x-3)(x-6)<(x-1)(x-2)$.

14. Pentru care valori ale necunoscutei x valoarea expresiei:

a) $-5(3x+2,2)-2$ este nenegativă; b) $3(0,5x-4)+8,5x$ este negativă?

15. Pentru care valori ale necunoscutei y valorile expresiei $\frac{3y-2}{72}$:

a) sunt pozitive; b) nu sunt mai mari decât 3; c) nu sunt mai mici ca – 5?

16. Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației $x-\frac{x+1}{2}<\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

17. Pentru care valori ale necunoscutei x are sens expresia:

a) $\sqrt{\frac{2,5x-4}{6}}$; b) $\sqrt{\frac{5}{0,8x-3}}$?

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 0{,}7x-3(0{,}2x+1)<0{,}5x+1, \\ 0{,}3(1-x)+0{,}8x>x+5{,}3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 17(3x-1)-50x+1<2(x+4), \\ 2(6-5x)<10(1-1{,}2x); \end{cases}$

c) $\begin{cases} (9x+3)(x-4)>9x^2+x+5, \\ 2x-3-(x-3)\le 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(6x+1)>x, \\ (5x-1)(5x+1)-25x^2>x-6. \end{cases}$

19. Examinați modelul și aflați valorile necunoscutei x pentru care are sens expresia:

a) $\sqrt{5x-3}+\sqrt{1-2x}$;

b) $\sqrt{2x+8}-\dfrac{2}{\sqrt{3-12x}}$.

Model:

Expresia $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{2x-1}$ are sens,

dacă $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}$.

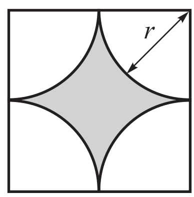
Răspuns: $x\in\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

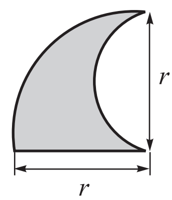
3

20. Pentru care valori $a\in\mathbb{R}$ este adevărată inegalitatea:

a) $a<|a|$; b) $-a<|a|$; c) $-a<|-a|$; d) $a<|-a|$?

21. Fie l lungimea liniei care mărginește figura colorată. Completați: $\square < l < \square$, dacă se știe că $2{,}5<r<2{,}6$.

a) 

b) 

22. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $|x|>5$; b) $|x|\le 3$; c) $1\le|x|<2$.

23. Scrieți inecuația ce conține necunoscuta în modul și care are mulțimea soluțiilor reprezentată pe axă:

a) 

b) 

24. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\dfrac{12-3x}{|x|+6}\ge 0$; b) $\dfrac{-x^2-3}{7x+21}\ge 0$; c) $\left(\dfrac{3x^2+2}{5x-8}\right)^{-1}\le 0$.

25*. Determinați valorile parametrului real m pentru care sistemul de inecuații $\begin{cases} x\le 2, \\ x\ge a: \end{cases}$

1) nu are soluții; 2) are o unică soluție;

3) are mulțimea soluțiilor $S=[a;\ 2]$; 4) are mulțimea soluțiilor $S=[2;\ a]$.

26. Rezolvați în muțimea $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 5x+8<3, \\ |x|\le 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-7\le 9, \\ |x|>3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x|>5, \\ |x|\le 7. \end{cases}$

27. Temperatura apei pentru îmbăiatul unui bebeluș trebuie să fie de cel mult 38°C și cel puțin 34°C. Câți litri de apă cu temperatura de 18°C trebuie să turnați în cada în care sunt deja 10 l de apă cu temperatura de 80°C, pentru ca să poată fi scăldat în ea copilul?

§4. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

4.1. Noțiunea de ecuație de gradul II cu o necunoscută

1 Pentru sărbătorile de Crăciun fiecare membru al familiei Guțu a pregătit câte un cadou pentru fiecare dintre ceilalți membri ai familiei. Astfel, sub pomul de Crăciun sunt 30 de cadouri. Din câte persoane este formată familia Guțu?

Rezolvăm

Fie familia Guțu este formată din x persoane. Atunci, fiecare membru al familiei a pregătit $(x-1)$ cadouri. Deci,

$$x\cdot(x-1)=30 \Leftrightarrow \boxed{x^2-x-30=0}$$ ← ecuație de gradul II cu o necunoscută

$$x^2-x-30=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5x-30=0 \Leftrightarrow x(x-6)+5(x-6)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-6)(x+5)=0 \Leftrightarrow x-6=0 \text{ sau } x+5=0 \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow x=6$ sau $x=-5$ – nu corespunde condițiilor problemei.

Răspuns: Familia este formată din 6 persoane.

Definiție. Ecuația de forma

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0},$$

primul coeficient (a), coeficientul al doilea (b), termenul liber (c)

unde $a\neq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, se numeşte **ecuație de gradul II cu o necunoscută**.

- Pentru $b=0$, $c\neq 0$ avem $ax^2+c=0$
- Pentru $b\neq 0$, $c=0$ avem $ax^2+bx=0$
- Pentru $b=0$, $c=0$ avem $ax^2=0$

ecuații de gradul II, forma incompletă

2 Examinați şi completați:

a) $\underbrace{5x^2}_{}\underbrace{-7x}_{}\underbrace{-12}_{}=0;$
$a=5;\ b=-7;\ c=-12.$

b) $3x^2+2x-5=0;$
$a=\square;\ b=\square;\ c=\square.$

c) $\sqrt{2}x^2-x=0;$
$a=\sqrt{2};\ b=-1;\ c=0.$

d) $x^2-4=0.$
$a=\square;\ b=\square;\ c=\square.$

• Care dintre ecuațiile a) – d) sunt incomplete?

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{\frac{a}{a}}}_{\substack{\parallel \\ 1}}x^2+\underbrace{\boxed{\frac{b}{a}}}_{\substack{\parallel \\ p}}x+\underbrace{\boxed{\frac{c}{a}}}_{\substack{\parallel \\ q}}=0,\quad a\neq 0,\quad a, b, c\in\mathbb{R}.$$

$x^2+px+q=0$ – ecuație de gradul II, forma redusă.

• Examinați și completați:

a) $3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

$a=\square$; $b=\square$; $c=\square$; $p=\square$; $q=\square$.

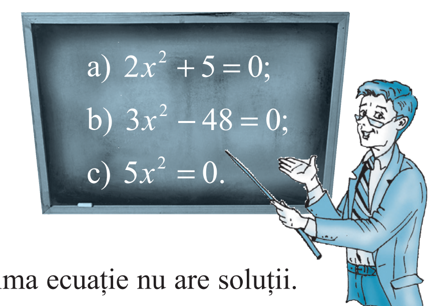
b) $2x^2+6x+5 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$

$a=\square$; $b=\square$; $c=\square$; $p=\square$; $q=\square$.

4.2. Rezolvarea ecuațiilor de gradul II, forma incompletă

4.2.1. Rezolvarea ecuațiilor de forma $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a, c\in\mathbb{R}$

1 Profesorul le-a propus elevilor să rezolve ecuațiile:



a) Dinu a răspuns imediat că prima ecuație nu are soluții. Sunteți de acord cu el? Argumentați.

b) Examinați și completați pentru a obține rezolvarea ecuației $3x^2-48=0$.

Rezolvare:

Metoda I

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3(x^2-16)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+4)(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4=0$ sau $x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.

Metoda II

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.

Răspuns: $S=\{\square;\ \square\}$.

c) $5x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Răspuns: $S=\{0\}$.

2 Examinați și comentați schema:

$$\boxed{ax^2+c=0},\quad a\neq 0,\ a,\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x^2=-\frac{c}{a}}$$

$$\boxed{-\frac{c}{a}>0}\ \Rightarrow\ \boxed{S=\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}};\ \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}}$$

$$\boxed{-\frac{c}{a}=0}\ \Rightarrow\ \boxed{S=\{0\}}$$

$$\boxed{-\frac{c}{a}<0}\ \Rightarrow\ \boxed{S=\varnothing}$$

4.2.2. Rezolvarea ecuațiilor de forma $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a,\ b\in\mathbb{R}$

Examinați modelul și continuați rezolvarea:

$2x^2+18x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\cdot(\square+\square)=0 \Leftrightarrow \square=0$

sau $\square+\square=0 \Leftrightarrow x=\square$,

sau $x=\square$.

Răspuns: $S=\{\square;\ \square\}$.

Model:

$3x^2-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(3x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$

sau $3x-1=0 \Leftrightarrow x=0,$

sau $x=\frac{1}{3}$.

Răspuns: $S=\left\{0;\ \frac{1}{3}\right\}$.

4.3. Formula de rezolvare a ecuației de gradul II cu o necunoscută

1 Examinați rezolvarea:

a) $x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2\cdot 2x+2^2)}_{(x+2)^2}-2^2-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=3$ sau $x+2=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ sau $x=-5$.

Răspuns: $S=\{-5;\ 1\}$.

b) $x^2-7x+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x^2-2\cdot\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{7}{2}\right)^2+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{11}{4}$.

Răspuns: $S=\varnothing$.

Pentru cazul general obținem:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\boxed{b^2-4ac}}{\boxed{4a^2}}$$

b^2-4ac ← ?

$4a^2$ ← număr pozitiv

Δ – litera *delta* din alfabetul grecesc (majusculă) → $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ ← **Discriminantul** ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ a, b, c\in\mathbb{R}$

$\boxed{\Delta<0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$$

$$\boxed{S=\varnothing}$$

$\boxed{\Delta>0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

sau $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ sau } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$$

$\boxed{\Delta=0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}}$$

2 Examinați și completați astfel încât să obțineți soluțiile reale ale fiecărei ecuații:

a) $5x^2-3x-2=0;$

$a=5;\ b=-3;\ c=-2.$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot5\cdot(-2)=49>0;$

$x_1=\dfrac{3+\sqrt{49}}{10};\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{49}}{10}.$

$x_1=1;\ x_2=-\dfrac{2}{5}.$

Răspuns: $S=\left\{-\dfrac{2}{5}; 1\right\}.$

b) $4x^2-12x+9=0;$

$a=4;\ b=12;\ c=9.$

$\Delta=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=0;$

$x=\dfrac{12}{8}.$

$x=\square.$

Răspuns: $S=\{\square\}.$

c) $x^2-5x+7=0;$

$a=1;\ b=-5;\ c=7.$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=$

$=-3\ \bigcirc\ \square.$

Răspuns: $S=\square.$

Observație. Dacă al doilea coeficient al ecuației de gradul II cu o necunoscută este un număr par, adică $b = 2p$, atunci pentru aflarea soluțiilor ecuației poate fi utilizată formula: $x_1 = \dfrac{-p + \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}$; $x_2 = \dfrac{-p - \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a}$, unde $\dfrac{\Delta}{4} = p^2 - ac > 0$.

DIN ISTORIE...

Papirusurile şi documentele istorice găsite demonstrează că ecuațiile de gradul II se rezolvau deja în Babilonul antic (circa 2000 de ani î.H.).

Matematicienii din Grecia antică rezolvau unele tipuri de ecuații de gradul II prin metoda reprezentărilor geometrice.

Regula generală de rezolvare a ecuației de gradul II a fost formulată de matematicianul german M. Stiefel (1486–1567). Matematicianul francez F. Viète (1540–1603) a dedus formula de rezolvare a ecuației de gradul II, însă afirmațiile savantului se refereau numai la soluțiile pozitive (el nu recunoştea numerele negative).


François Viète

4.4. Relațiile lui Viète

1 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Examinăm

Ecuația — Soluțiile

1. $\boxed{x^2 - 3x + 2 = 0} \longrightarrow \boxed{x_1 = 1; \quad x_2 = 2}$

$\boxed{-(x_1 + x_2)}$ $\boxed{x_1 \cdot x_2}$ $\boxed{x_1 + x_2 = 3}$ $\boxed{x_1 \cdot x_2 = 2}$

Relațiile lui Viète

Ecuația

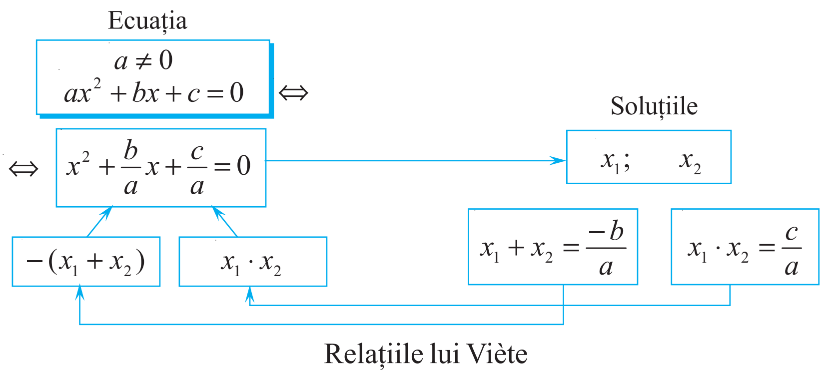
2. $\boxed{2x^2 - 7x + 3 = 0} \Leftrightarrow$

Soluțiile

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{3}{2} = 0} \longrightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{1}{2}; \quad x_2 = 3}$

$\boxed{-(x_1 + x_2)}$ $\boxed{x_1 \cdot x_2}$ $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{7}{2}}$ $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{2}}$

Relațiile lui Viète



Teoremă. Dacă numerele x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Demonstrație:

Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

$$\boxed{x_1 + x_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}};$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \boxed{\frac{c}{a}},$$

c.c.t.d. ►

Pentru ecuația de gradul II, forma redusă, $x^2 + px + q = 0$, ale cărei soluții sunt x_1 și x_2, avem $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Reciproca teoremei lui Viète. Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1 \cdot x_2 = q$, atunci x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

Demonstrație:

Avem $x^2 + px + q = 0$, $-p = x_1 + x_2$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Obținem $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

Pentru $x = x_1$ avem: $x_1^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 x_2 = 0$ – Adevărat. Deci, x_1 este soluție a ecuației date.

Pentru $x = x_2$ avem: $\square$ – Adevărat, c.c.t.d. ►

2 Examinați și completați:

a) Compunem o ecuație de gradul II, forma redusă, cu mulțimea soluțiilor $S = \{-2; 7\}$:

$x_1 = -2;\ x_2 = 7.$ $\quad x_1 + x_2 = \square;\quad x_1 \cdot x_2 = \square.$

$x^2 \bigcirc \square x \bigcirc \square = 0.$

Răspuns: $x^2 \bigcirc \square x \bigcirc \square = 0.$

b) Utilizând relațiile lui Viète, aflăm soluțiile reale ale ecuației:

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$x_1 + x_2 = 11;\ x_1 \cdot x_2 = 24$

$3 + 8 = 11 \quad 3 \cdot 8 = 24$

$S = \{3; 8\}.$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 3;$

$x_1 \cdot x_2 = -10.$

$S = \{\square; \square\}.$

$x^2 + 5x - 14 = 0$

$x_1 + x_2 = \square;$

$x_1 \cdot x_2 = \square.$

$S = \{\square; \square\}.$

• Fie ecuația $x^2 + px + q = 0.$
Completați tabelul:

x_1	x_2	p	q
2	–3		
–2		5	
	4	–2	
3			18
	1		–7

INTERESANT ȘI UTIL!

Relațiile lui Viète pot fi aplicate la calculul oral al soluțiilor nu numai ale ecuației de gradul II, forma redusă, dar și ale ecuației de gradul II, forma completă, care are soluții.

Rezolvăm ecuația:

a) $\boxed{7}x^2 - 2x - 5 = 0$

$y^2 - 2y - 35 = 0$

$y_1 = 7;\ y_2 = -5$

$x_1 = \frac{7}{7};\ x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{5}{\boxed{7}}.$

Verificați!

Răspuns: $S = \left\{-\frac{5}{7}; 1\right\}.$

b) $\boxed{2}x^2 + 3x - 9 = 0$

-18

$x_1 = \frac{-6}{2};\ x_1 = -3;\ x_2 = \frac{3}{2}.$

Răspuns: $S = \{\square; \square\}.$

c) $\boxed{4}x^2 + x - 5 = 0$

-20

$x_1 = \frac{\square}{4};\ x_2 = \frac{\square}{4};$

$x_1 = \square;\ x_2 = \square.$

Răspuns: $S = \{\square; \square\}.$

4.5. Descompunerea în factori a expresiilor de forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

1 Scrieți expresia $3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ sub forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

Rezolvare:

$$3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x^2-x-6x+2=\boxed{3x^2-7x+2}.$$

• Descompuneți în factori expresia $3x^2-7x+2$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuația $3x^2-7x+2=0$.

Calculăm $\Delta=49-24=25$. Atunci

$$x_1=\frac{7+5}{6};\ x_2=\frac{7-5}{6};\ x_1=2;\ x_2=\frac{1}{3}.$$

Obținem $3x^2-7x+2=3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

Dacă $a\neq 0$ și $\Delta\geq 0$, atunci $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)}$, unde $a\neq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, iar x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

În ce caz expresia de forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$, nu poate fi descompusă în factori?

2 Examinați și completați.
Descompunem în factori expresia:

a) $-2x^2-3x+2$;

Rezolvăm ecuația

$-2x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0$.

$\Delta=9+16=25$. Deci,

$x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-2$. Atunci

$$\boxed{-2}\,x^2-3x+2=\underbrace{\boxed{-2}}_{a}\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}_{(x-x_1)(x-x_2)}=$$

$=(-2x+1)(x+2)$.

b) $7x^2+9x+2$.

Rezolvăm ecuația $7x^2+9x+2=0$.

$x_1=\square;\ x_2=\square$.

$$\boxed{7}\,x^2+9x+2=\underbrace{\square}_{a}\underbrace{(x\ \bigcirc\ \square)(x\ \bigcirc\ \square)}_{(x-x_1)(x-x_2)}=$$

$=(\square\ \bigcirc\ \square)(\square\ \bigcirc\ \square)$.

Exerciții și probleme

1

1. Fie ecuațiile:

$\boxed{\sqrt{x}+x-3=0}$ $\boxed{2x^2-3x+1=0}$ $\boxed{3x+5=0}$ $\boxed{3x^2-5=0}$ $\boxed{\dfrac{x^2}{2}-8x=0}$ $\boxed{(2\sqrt{2}-\sqrt{8})x^2+2x-\sqrt{2}=0}$

Selectați ecuațiile de gradul II cu o necunoscută și scrieți-le pe caiet.

2. Care dintre numerele –7; –5; 5; 7 sunt soluții ale ecuației $x^2+2x-35=0$?

3. Arătați că numerele $1-\sqrt{2}$ și $1+\sqrt{2}$ sunt soluții ale ecuației $x^2-2x-1=0$.

4. Indicați coeficienții *a*, *b* și termenul liber *c* ai ecuației:

a) $3x^2-4x-4=0$; b) $x^2-x-2=0$; c) $7x^2-1=0$;
d) $5x^2+3x=0$; e) $8x-x^2+2=0$; f) $4x^2+x+\sqrt{5}-2=0$.

5. Scrieți ecuația de gradul II cu coeficienții:

a) $a=3;\ b=6;\ c=-2$; b) $a=2;\ b=-1;\ c=5$; c) $a=1;\ b=2;\ c=-3$;
d) $a=2;\ b=5;\ c=0$; e) $a=-2;\ b=0;\ c=2$.

Determinați care dintre ecuațiile obținute sunt ecuații de gradul II, forma incompletă.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile de gradul II, forma incompletă:

a) $3x^2-12=0$; b) $2x^2-5x=0$; c) $5x^2+8=0$;
d) $10x^2=0$; e) $x^2+x=0$; f) $x^2-0{,}99=1{,}01$;
g) $4x^2-12x=0$; h) $3x^2+\sqrt{3}x=0$; i) $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}=0$.

7. Calculați discriminantul ecuației; determinați dacă ecuația are soluții în $\mathbb{R}$ și aflați soluțiile în cazul în care ele există:

a) $x^2-7x-18=0$; b) $3x^2-5x+2=0$; c) $3x^2-11x+10=0$;
d) $4x^2-4x+1=0$; e) $x^2+3x+5=0$; f) $2x-x^2+3=0$;
g) $1-x-6x^2=0$; h) $25x^2+10x+1=0$; i) $x^2+7x-1=0$.

8. Utilizând relațiile lui Viète, aflați suma și produsul soluțiilor ecuației:

a) $x^2-14x+13=0$; b) $x^2+12x+35=0$; c) $7x^2-2x-14=0$.

2

9. Aflați valorile reale ale lui *x*, astfel încât să fie adevărată egalitatea (rotunjiți rezultatul până la zecimi):

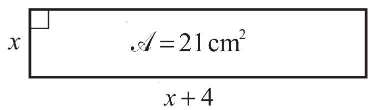
a) $x^2-6x-1=0$; b) $x^2+5x=x-1$; c) $x^2-x=x+2$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

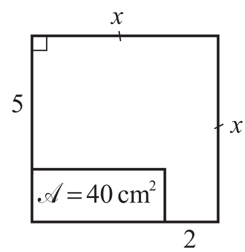
a) $3(x-2)^2=2x+4$; b) $(x+2)^2=x(3x+2)$; c) $(3x+4)^2-(x-5)^2=-9$;
d) $(3x-2)(x+6)=-9$; e) $(x+2)^2=8(3x+8)$; f) $\frac{(4x+1)^2}{5}=3x+\frac{7x-1}{3}$.

11. Utilizând datele din desen, aflați x:

a)



b)



12. **LUCRARE PRACTICĂ**

1. Completați tabelul:

a)

Ecuația	$a+b+c$	Soluțiile
$x^2+x-2=0$		
$x^2-3x+2=0$		
$2x^2-5x+3=0$		
$5x^2-7x+2=0$		

b)

Ecuația	$a-b+c$	Soluțiile
$x^2+5x+4=0$		
$3x^2-7x-10=0$		
$-9x^2-4x+5=0$		
$13x^2+6x-7=0$		

2. Trageți concluzia:

Dacă $a+b+c=$ ☐, atunci $x_1=$ ☐, $x_2=$ ☐.

Dacă $a-b+c=$ ☐, atunci $x_1=$ ☐, $x_2=$ ☐.

13. Scrieți o ecuație de gradul II, forma redusă, cu mulțimea soluțiilor:

a) $S=\{-3;\ 4\}$;
b) $S=\{2;\ 7\}$;
c) $S=\{-2;\ -5\}$;
d) $S=\{2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\}$;
e) $S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$;
f) $S=\varnothing$.

14. Utilizând relațiile lui Viète, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-5x+6=0$;
b) $x^2+11x+18=0$;
c) $x^2+5x-14=0$;
d) $x^2-4x-21=0$;
e) $x^2+6x-40=0$;
f) $x^2-x-12=0$;
g) $x^2+8x+7=0$;
h) $x^2-(5-\sqrt{3})x-5\sqrt{3}=0$;
i) $x^2-(8-\sqrt{15})x+5(3-\sqrt{15})=0$.

15. Descompuneți în factori, dacă e posibil, expresia:

a) $x^2-10x+21$;
b) $6x^2-11x+3$;
c) $3x^2+7x-6$;
d) $-2x^2+3x+2$;
e) $4x^2+x+1$;
f) $2x^2+4x-5$.

16. Simplificați raportul:

a) $\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$;
b) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+5x}$;
c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}$.

3

17. O piatră care a fost aruncată cu viteza inițială de 20 m/s se mişcă conform legii $s = vt - 5t^2$. Peste câte secunde piatra va ajunge la înălțimea de 15 m?

18. ***Problemă din Antichitate***

Aflați lungimea laturii unui pătrat, ştiind că, dacă din valoarea ariei lui scădem valoarea lungimii căutate, obținem 870.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația[1]:

a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0;$

b) $5x^4 - 2x^2 - 3 = 0;$

c) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0;$

d) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0.$

Model:

$4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$. Fie $x^2 = t,\ t \geq 0;$

$4t^2 + 7t - 2 = 0;\ \Delta = 81;$

$t_1 = \frac{1}{4};\ t_2 = -2$ – nu satisface condiția $t \geq 0$.

$x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = -\frac{1}{2}$.

Răspuns: $S = \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$.

20*. Aflați parametrul real m şi soluția a doua a ecuației, dacă:

a) $x^2 + mx - 15 = 0$ şi $x_1 = -5;$ b) $2x^2 + 3x + m = 0$ şi $x_1 = 3.$

21. Aflați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația să aibă o unică soluție:

a) $x^2 - mx + 9 = 0;$ b) $x^2 + 3mx + m = 0;$

c) $2x^2 - 2x + m = 0;$ d) $9x^2 - 2x + m = 6 - mx.$

22. Fundul unui havuz are forma unui dreptunghi cu laturile de 6 m şi 9 m. În jurul havuzului este o cărare pavată, de aceeaşi lățime. Aria cărării este egală cu aria fundului havuzului. Aflați lățimea cărării.

23. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x^3}{|x|} + x + 2 = 0;$ b) $x^2 - \frac{x^2}{|x|} - 6 = 0;$

c) $x^2 - 10 = 3|x|;$ d) $x^2 + |x| + x = 63.$

24. x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 13x + 14 = 0$. Aflați, fără a rezolva ecuația, valoarea expresiei:

a) $(x_1 + x_2)^2;$ b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};$ c) $x_1^2 + x_2^2;$ d) $(x_1 - x_2)^2.$

25. Pentru care $a \in \mathbb{R}$:

a) $2x^2 - 5x + a = (2x + 3) \cdot E(x);$ b) $-4x^2 + ax + 1 = (x - 1) \cdot E(x),$

unde $E(x)$ este o expresie de x.

[1] Ecuațiile de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, unde $a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, se numesc **ecuații bipătratice**.

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. Exprimați necunoscuta y prin necunoscuta x şi aflați trei soluții reale ale ecuației:
a) $2x - y = 7$; b) $x + 2y = 12$; c) $-8x + 2y = 6$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 5x + y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 1, \\ 8x - 2y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 2x - 5y = 9. \end{cases}$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $2(3 - 2x) + 3(2 - x) \le -2$; b) $4(2 - 3x) - 3(4 - 2x) > 2$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:
a) $\begin{cases} 3x + 5 > 11, \\ x + 7 < 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x - 4) < -3, \\ 5 - 2x > 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 17 > 13, \\ 19 - 2x > 21. \end{cases}$

5. Indicați numărul plicului în care poate fi pusă fiecare ecuație:

$3x^2 + 30 = 0$	$x^2 - 6x - 16 = 0$	$x^2 - 6x = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0$

1	2	3	4
Una dintre soluții este 0.	Are o unică soluție.	Nu are soluții în $\mathbb{R}$.	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \cdot x_2 = 16. \end{cases}$

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $2x^2 + x - 6 = 0$; b) $3x^2 + 4x - 4 = 0$; c) $7 - 6x - 9x^2 = 8$;
d) $2(x - 1)^2 = 3x + 2$; e) $(x - 2)(x + 3) = 24$; f) $(x - 3)(x + 2) = 14$.

7. Compuneți o ecuație de gradul II, forma redusă, care are soluțiile:
a) $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; b) $x_1 = -7$; $x_2 = -3$; c) $x_1 = 4$; $x_2 = 6$.

☐ **2** ☐

8. Reprezentați graficul ecuației:
a) $4x - 3y = 6$; b) $2x + 3y = 3$.

9. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$

10. Rezolvați prin două metode sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$

11. Aflați cea mai mică soluție naturală a inecuației $\frac{x + 4}{7} - \frac{x + 7}{4} < -3$.

12. Pentru care valori ale lui x, $f(x) > 0$, $f(x) < 3$, $f(x) \ge 5$, dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = -3x + 7$; b) $f(x) = \frac{5 - 4x}{2}$?

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x - \frac{2x + 1}{4} \ge \frac{4x - 3}{3}$.

14. Aflați valorile reale ale lui x pentru care au loc simultan inegalitățile:

a) $1-2x \geq -3$ și
$1+2x \leq 4$;

b) $4x-2 \geq -1$ și
$4x-2<5$.

15. Aflați valorile lui x pentru care are sens expresia $\sqrt{0{,}7+\frac{x}{4}}+\frac{5}{\sqrt{2-0{,}4x}}$.

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x-1)^2+(x+2)^2-(x-2)(x+2)=24$;

b) $(x-2)^2+(x+1)^2-(x-1)(x+1)=14$;

c) $\frac{1-x^2}{4}=1-\frac{2x+1}{3}$;

d) $\frac{x^2-1}{3}-2=\frac{2x-1}{5}$.

17. x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2-7x-3=0$.
Compuneți o ecuație de gradul II, ale cărei soluții sunt numerele:

a) x_1-2 și x_2-2;

b) $2x_1+3$ și $2x_2+3$;

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

18. Aflați valoarea expresiei:

a) $\frac{49-x^2}{x^2-6x-7}$ pentru $x=999$;

b) $\frac{x^2-11x+10}{20+8x-x^2}$ pentru $x=101$.

□ □ **3**

19. Pentru care valori ale lui m, $m \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+my=1 \end{cases}$ nu are soluții?

20. Tortul „Veselia” se prepară din făină, smântână, zahăr și unt. Se știe că pentru un tort de 800 g s-a folosit smântână cu 180 g mai puțină decât făină și cu 40 g mai multă decât zahăr. Unt s-a folosit de 7 ori mai puțin decât smântână. Aflați cantitatea fiecărui ingredient.

21. Un turist urcă dealul cu viteza de 3 km/h și îl coboară cu viteza de 5 km/h. Aflați distanța parcursă de turist, dacă urcușul este cu 1 km mai lung decât coborâșul și turistul a parcurs întreaga distanță în 3 ore.

22. Câte kilograme de bomboane cu prețul de 78 de lei/kg trebuie de adăugat la 2 kg de bomboane cu prețul de 54 de lei/kg pentru ca prețul bomboanelor asortate să fie de cel puțin 60 de lei/kg și cel mult 68 de lei/kg?

23. La o competiție participă câteva echipe. Fiecare echipă trebuie să joace câte o partidă cu fiecare dintre celelalte echipe. Câte echipe participă la competiție, dacă în total trebuie să se joace 45 de partide?

24. Aflați valorile parametrului real a pentru care ecuația:

a) $2x^2-5x+a=0$ nu are soluții;

b) $ax^2-(a+1)x+2a-1=0$ are o soluție unică.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1

1. Aflați o soluție a ecuației:
$$2x+y=5.$$

1

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-y=1,\\x+y=-4.\end{cases}$

2

3. Aflați toate soluțiile întregi ale sistemului de inecuații $\begin{cases}3x-2<7,\\4-2x\le 3x+14.\end{cases}$

3

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
   a) $6x^2+0{,}5x=0$;
   b) $3x^2+13x-10=0$;
   c) $5x(5x+2)+3=2$.

1

5. Scrieți o ecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor $S=\{3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2}\}$.

2

6. Pe o platformă s-au încărcat bârne de stejar și de brad, în total 300 de bârne. Se știe că bârnele de stejar cântăresc cu 1 t mai puțin decât cele de brad. Aflați câte bârne de stejar și câte de brad au fost încărcate pe platformă, dacă o bârnă de stejar cântărește 46 kg, iar una de brad – 28 kg.

Varianta 2

1. Aflați o soluție a ecuației:
$$x-2y=1.$$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+y=-1,\\x-y=5.\end{cases}$

3. Aflați toate soluțiile întregi ale sistemului de inecuații $\begin{cases}2x+5\le 11,\\4-3x<2x+9.\end{cases}$

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
   a) $5x^2+0{,}2x=0$;
   b) $5x^2-6x+1=0$;
   c) $3x(3x-2)+7=6$.

5. Scrieți o ecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor $S=\{1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$.

6. În două butoaie sunt 140 l de apă. După ce din primul butoi s-au scos 26 l de apă, iar din al doilea – 60 l de apă, în primul butoi a rămas de 2 ori mai multă apă decât în cel de-al doilea. Câți litri de apă au fost în fiecare butoi la început?

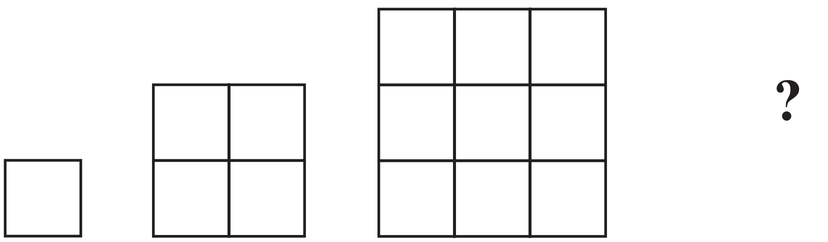
5 capitolul

Funcții. Șiruri

§1. Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de funcție

1 Observați legitatea şi construiți figura ce urmează.



$(1\ \text{cm})^2$ $(2\ \text{cm})^2$ $(3\ \text{cm})^2$ $(4\ \text{cm})^2$

2 În tabel este înregistrată distanța parcursă de un automobil în 1 oră; 2 ore; 3 ore; 3,5 ore; 4 ore; 4,5 ore.

t, ore	1	2	3	3,5	4	4,5
s, km	85	190	280	330	420	475

În secvențele **1** şi **2** sunt examinate corespondențele dintre elementele a două mulțimi $\mathbb{N}^*$ şi $\mathbb{N}^*$; $\{1; 2; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5\}$ şi $\mathbb{R}$.

Astfel de ***corespondențe*** se numesc ***funcționale***.

Definiție. Fie X şi Y două mulțimi nevide. Corespondența prin care fiecărui element al mulțimii X i se asociază un singur element al mulțimii Y se numeşte **funcție definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y** (sau, pe scurt, **funcție de la X la Y**).

Notația $f\colon X \to Y$ se citeşte „funcția f definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y” sau „funcția f de la X la Y”.

Astfel, în secvențele **1** și **2** putem defini funcțiile $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ și $g\colon \{1;\ 2;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ 4{,}5\} \to \mathbb{R}$.

• Observați și completați adecvat:

Elementele funcției $f\colon X \to Y$

- ....
- ....
- **Domeniul de valori** sau **codomeniul funcției**

Fie funcția $f\colon X \to Y$ și x un element arbitrar al mulțimii X.

Dacă $y \in Y$ și funcția f asociază elementului x elementul y, atunci se spune că x este ***argumentul*** (sau ***variabila independentă*** a) ***funcției***, iar y este ***valoarea funcției*** f ***în punctul*** x.
Se notează $y = f(x)$ și se citește „y este egal cu f de x”.
Se mai spune „y este funcție de argumentul x”.

Definiție. Mulțimea $E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ se numește **mulțimea valorilor funcției** f.

Avem $E(f) \subseteq Y$.

1.2. Moduri de definire a funcției

• Analizați și completați.

Moduri de definire a funcției

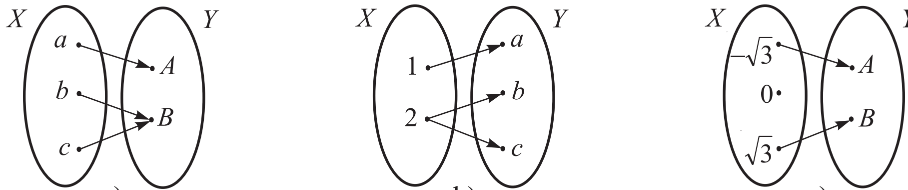
- Modul sintetic
  - Printr-un tabel, numit ....
  - Printr-o diagramă
  - Printr-un grafic
- Modul analitic
  - Printr-o ....

• Completați tabelul de valori (vezi problema **1**):

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	1	4	9			

Funcția poate fi definită și verbal. Exemplificați!

• Care dintre următoarele diagrame definește o funcție? Argumentați.



a) b) c)

• a) Care dintre următoarele tabele definește o funcție?

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	6	4	2	0	-2

①

x	5	3	2	1	0	-1
$g(x)$	10	8	7	6	5	4

②

x	A	B	C	D	E	F
$h(x)$	10	10	10	10	10	10

③

b) Descrieți printr-o formulă fiecare dintre funcțiile definite în a).

Explicăm

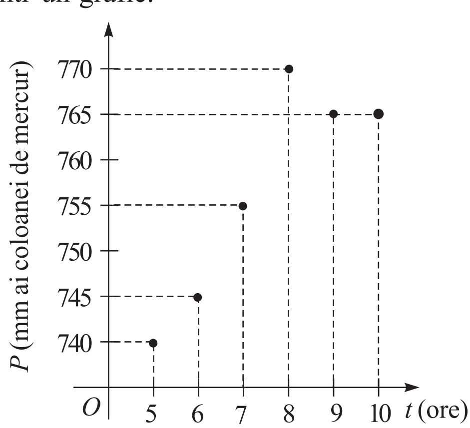
1. $f\colon \underbrace{\{-3, -2, -1, 0, 1\}}_{D(f)} \to \underbrace{\{6, 4, 2, 0, -2\}}_{E(f)},\ \underbrace{f(x) = -2x}_{\text{Formula}};$

2. $g\colon \boxed{\quad\quad} \to \boxed{\quad\quad},\ g(x) = \boxed{\quad\quad};$

3. $h\colon \boxed{\quad\quad} \to \boxed{\quad\quad},\ h(x) = \boxed{\quad\quad}.$

1.3. Graficul funcției

• Meteorologul de serviciu a înregistrat la fiecare oră presiunea atmosferică și a reprezentat rezultatele printr-un grafic.



Presiunea atmosferică minimală a fost înregistrată la ora .

Presiunea atmosferică maximală a fost înregistrată la ora .

La ora 7 presiunea atmosferică era de .

În perioada de la ora   până la ora   presiunea atmosferică nu s-a schimbat.
În ce perioadă de timp presiunea atmosferică s-a ridicat? Dar în care a coborât?

• Defineşte graficul reprezentat o funcție?

Explicăm

Graficul reprezentat defineşte o funcție de forma $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, deoarece fiecărei ore x, $x \in \mathbb{N}$, îi corespunde o singură valoare a presiunii atmosferice y, $y \in \mathbb{N}$.

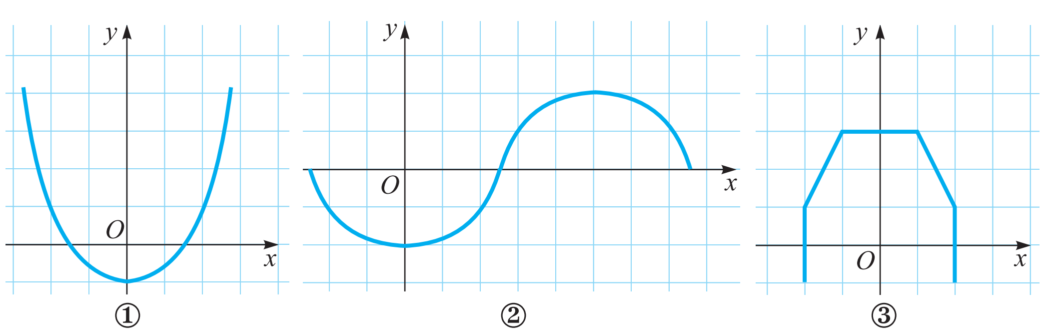
Definiție. Funcția $f\colon X \to Y$, unde X şi Y sunt mulțimi numerice, se numeşte **funcție numerică**.

Domeniul de definiție al unei funcții numerice poate fi o mulțime numerică finită sau infinită.

$$g\colon \underbrace{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}}_{\boxed{\operatorname{card} D(g) = 7}} \to \{5\}; \qquad h\colon \underbrace{\mathbb{R}}_{\boxed{D(h) - \text{mulțime numerică infinită}}} \to \mathbb{R}^*_+,$$

Graficul funcției numerice $f\colon X \to Y$ este figura formată din punctele cu coordonatele (x, y), unde $x \in X$ şi $y = f(x) \in Y$.
Graficul funcției f se notează cu G_f.
Deci, $G_f = \{(x, y) \mid x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$.
Egalitatea $y = f(x)$ se numeşte ***ecuația graficului funcției*** f.

• Observați şi determinați care dintre următoarele grafice defineşte o funcție. Argumentați.



Exerciții și probleme

1

1. 1) Citiți funcția:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; b) $g: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 8, 27, 64\}$; c) $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; d) $p: \mathbb{R} \to \{10\}$.

2) Indicați elementele funcției.

3) Determinați domeniul de definiție şi domeniul de valori ale funcției.

2. Completați adecvat:

a) $f: \{-1; -0,5; 0; 0,5; 1\} \to \{-5; \square; \square; \square; \square;\}$, $f(x) = 5x$;

b) $g: \{-\sqrt{5}, -2, 1, \sqrt{5}, \sqrt{7}\} \to \{\square\}$, $g(x) = 2$;

c) $h: \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\} \to \{\square, \square, \square, \square, \square\}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

3. Un tren ce se deplasează cu viteza de 80 km/h parcurge distanța s km în t ore. Scrieți formula prin care se defineşte dependența lui s de t. Aflați valoarea funcției pentru valorile 2,5; 1,2 şi 0,6 ale argumentului.

4. Aria unui dreptunghi cu laturile de 8 cm şi x cm este egală cu A cm². Definiți printr-o formulă dependența lui A de x. Aflați valorile funcției pentru valorile argumentului $x \in \{2; 4,5; 10\}$.

5. Fie funcția $f: \{-4; -0,5; 0; 1; 2; 5\} \to \mathbb{R}$:

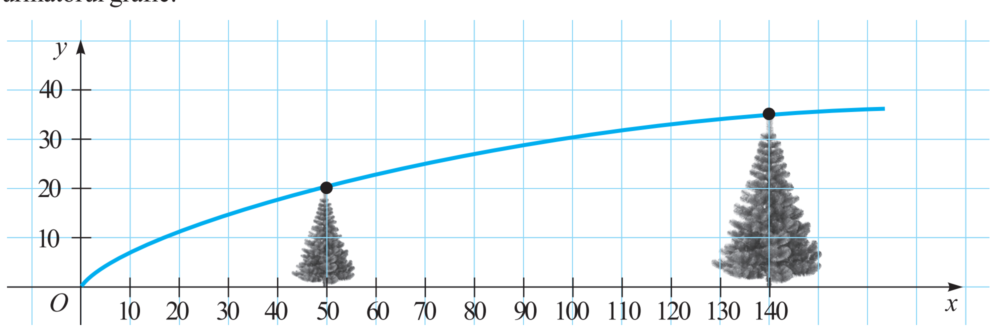
a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = 2x^2$; c) $f(x) = 3 - x$.

1) Completați tabelul de valori al funcției f.

2) Determinați $D(f)$ şi $E(f)$.

3) Definiți funcția f prin diagramă.

6. Dependența dintre înălțimea y (în m) a unui brad şi vârsta acestuia x (în ani) este redată în următorul grafic:



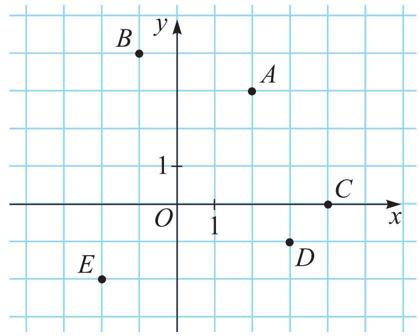
a) Aflați înălțimea bradului la vârsta de: 10 ani; 30 de ani; 100 de ani.

b) Cu cât a crescut bradul în perioada de la 10 până la 50 de ani; de la 30 până la 80 de ani; de la 100 până la 140 de ani?

7. a) Completați adecvat:

$A(\ ;\ ), B(\ ;\ ), C(\ ;\ ), D(\ ;\ ),$
$E(\ ;\ ).$

b) Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele:
$F(-2;\ 3);\ G(1{,}5;\ 0);\ H(0;\ -4);$
$K(3{,}5;\ -2);\ L(-4;\ -3).$



8. Construiți și completați tabelul de valori al funcției:

a) $f: \{a \,|\, |a| \le 3,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 1 - x;$

b) $g: \left\{\dfrac{a}{2} \,\middle|\, a < 5,\ a \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \dfrac{1}{2x+1};$

c) $h: \{a^2 \,|\, -2 \le a < 4,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2 + 1.$

9. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită analitic prin formula:

a) $f(x) = -2x + 3;$ b) $f(x) = x^2 - 2.$

1) Aflați pentru care valori ale argumentului x valoarea funcției f este egală cu:
a) 2; b) 0; c) 7.

2) Construiți și completați tabelul de valori al funcției f pentru $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

3) Reprezentați grafic funcția f în baza tabelului de valori obținut la 2).

10. Verificați dacă punctul:

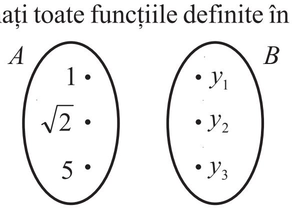
1) $A\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right);$ 2) $O(0, 0);$ 3) $B(-3, 9)$

aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

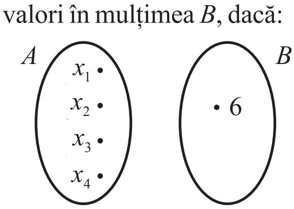
a) $f(x) = -\dfrac{x}{2};$ b) $f(x) = -2x;$ c) $f(x) = x^2.$

11. Determinați toate funcțiile definite în mulțimea A cu valori în mulțimea B, dacă:

a)



b)



12. Reprezentați grafic 8 puncte cu coordonatele (x, y), dacă:

a) $y = 3x + 2;$ b) $y = x^2 + 2.$

Ce observați?

13. Aflați mulțimea de valori și reprezentați grafic funcția:

a) $f: \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3}{x};$

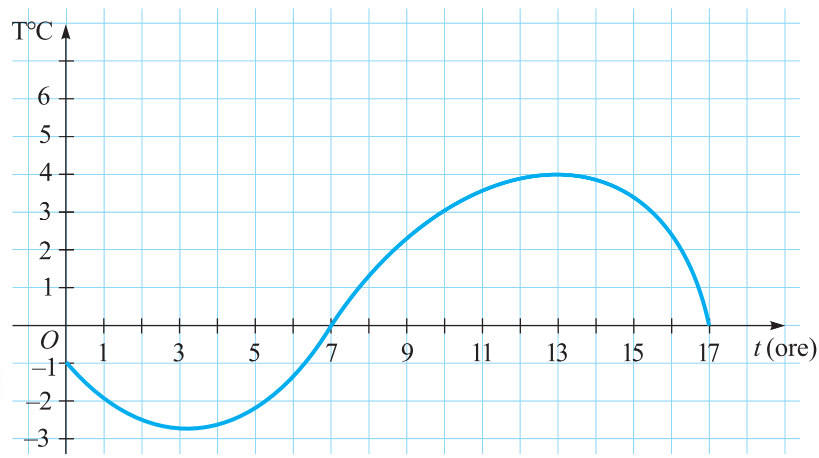
b) $f: \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\dfrac{5}{x}.$

Ce observați?

14. Fie $f: D \to \mathbb{R}$. Aflați $D(f)$, dacă:

a) $f(x) = 3{,}5x + 0{,}(8)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$; c) $f(x) = 2x^2 + 3$; d) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

15. În desen este reprezentat graficul variației temperaturii într-o zi de la începutul lunii martie.



a) Ce temperatură era la ora 2; 5; 7; 10; 14; 16; 17?
b) La ce oră temperatura era de –1°; 0°; 3°; 4°?
c) La ce oră a fost cea mai joasă temperatură? Dar cea mai ridicată?

16. Graficul funcției f este linia frântă $ABCD$, unde $A(-1, -2)$, $B(0, 5)$, $C(4, 2)$, $D(7, 1)$. Reprezentați graficul funcției f şi completați tabelul.

x	–1	0,5		5		6	
y			3		0,5		4

17. Formulați exemple de dependențe funcționale:
a) din viața cotidiană; b) din fizică; c) din chimie; d) din geografie.

3

18. Aflați $D(f)$, dacă:

a) $f(x) = \dfrac{2}{|x-2|-4}$; b) $f(x) = -\dfrac{|x|}{3|x|-3}$.

19. Aflați cea mai mică valoare a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$; b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$.

20. Demonstrați că funcția $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 10}$, nu poate avea valori negative. Aflați $D(f)$.

21. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3|x| - 1$, unde $-4 \le x \le -3$; b) $f(x) = \dfrac{2}{|x|+2}$, unde $-3 \le x \le 3$.

22. Compuneți şi rezolvați câte un exercițiu de tipul exercițiilor 17–21.

§2. Funcția de gradul I

2.1. Noțiunile *funcție de gradul I* și *funcție constantă*

• Dinu avea 20 de lei. El şi-a procurat x pixuri la preţul de 1,5 lei şi i-au mai rămas f lei. Definiţi printr-o formulă funcţia ce determină dependenţa lui f de x. Care este domeniul de definiţie al acestei funcţii?

Rezolvare:

Pentru x pixuri Dinu a plătit $\square$ lei.

Atunci, formula prin care se defineşte funcţia respectivă este $f(x)=20-\square$ sau $f(x)=-\square+20$, unde $D(f)=\{1, 2, 3, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square\}$.

Funcţia obţinută este o funcţie de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, unde $a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}$.

Definiție. Funcţia de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, unde $a\neq 0$ şi $a, b\in\mathbb{R}$, se numeşte **funcţie de gradul I**.

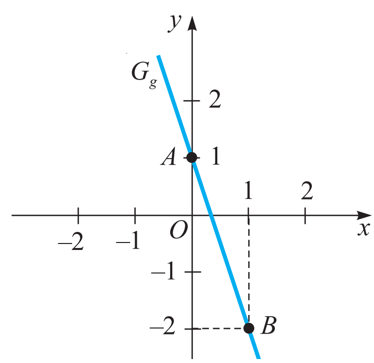
• Reprezentaţi grafic funcţia de gradul I $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-3x+1$.

Rezolvare:

Graficul funcţiei g este o dreaptă. Pentru a construi această dreaptă este suficient să determinăm coordonatele a $\square$ puncte diferite ale acesteia:

x	0	$\square$
$g(x)$	$\square$	–2

$A(0;\ \square),\ B(\square;\ -2)$.



• Ce figură geometrică reprezintă graficul funcţiei $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=-3$?

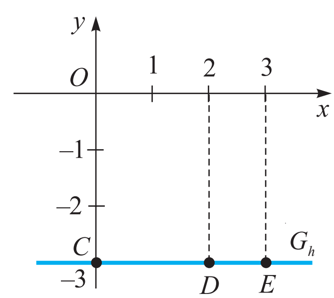
Explicăm

Pentru funcţia h avem

x	0	2	3
$h(x)$	–3	–3	–3

Deci, $C(0, -3),\ D(\square, \square),\ E(\square, \square)$.

Aşadar, graficul funcţiei h este o dreaptă paralelă cu axa Ox.



Definiție. Funcţia de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=b$, unde $b\in\mathbb{R}$, se numeşte **funcţie constantă**.

Graficul funcţiei de gradul I este o dreaptă.
Graficul funcţiei constante este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

2.2. Proprietăți ale funcției de gradul I

• a) Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x - 2,$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -0{,}5x + 4.$

b) Aflați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor G_f și G_g cu axa Ox și axa Oy.

c) Determinați tipul unghiului format de graficul fiecărei funcții cu direcția pozitivă a axei Ox.

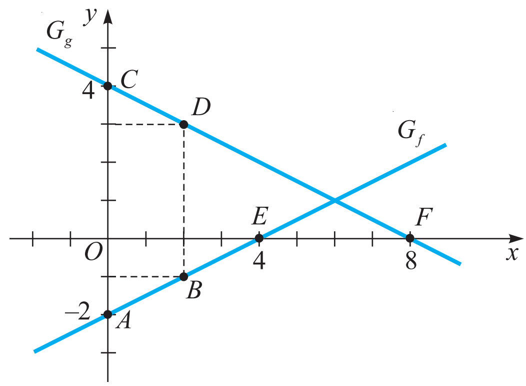
d) Fie $x_1 > x_2$. Comparați: $f(x_1)$ cu $f(x_2)$, $g(x_1)$ cu $g(x_2)$.

e) Pentru care valori ale variabilei x: $f(x) > 0,\ g(x) > 0$? Dar $f(x) < 0,\ g(x) < 0$?

Rezolvare:

a)

x	0	2
$f(x)$		
$g(x)$		



Punctele de coordonate $A(0;\ \square)$ și $B(\square;\ -1)$ determină o dreaptă, care este graficul funcției $\square$.

Punctele de coordonate $C(0;\ \square)$ și $D(\square;\ 3)$ determină o dreaptă, care este graficul funcției g.

b) 1) Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficelor G_f și G_g cu axa Ox:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \square = 0 \Leftrightarrow x = \square.$

Cum $y = 0$, obținem $E(\square;\ 0)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \square = 0 \Leftrightarrow x = \square.$

Cum $y = 0$, obținem $F(\square;\ 0)$.

2) Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficelor G_f și G_g cu axa Oy:

Cum $x = 0$, obținem:

$y = f(0) = 0{,}5 \cdot \square - 2 = -2.$

Obținem $A(0;\ \square)$.

Cum $x = 0$, obținem:

$y = g(0) = -0{,}5 \cdot \square + 4 = 4.$

Obținem $C(0;\ \square)$.

c) Unghiul α format de G_f și direcția pozitivă a axei Ox este $\square$.

c) Unghiul β format de G_g și direcția pozitivă a axei Ox este $\square$.

d) Analizăm graficele G_f şi G_g şi tragem concluzia.

Pentru orice $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1 \; \square \; x_2$, are loc relația $f(x_1) \; \square \; f(x_2)$.

Astfel, funcția f este strict crescătoare.

Pentru orice $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1 \; \square \; x_2$, are loc relația $g(x_1) \; \square \; g(x_2)$.

Astfel, funcția g este strict descrescătoare.

e) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

$f(x) < 0$ pentru orice $\square$.

e) $g(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 8$.

$g(x) < 0$ pentru orice $\square$.

Definiții. Fie funcția $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$.

- **Zerou al funcției** f se numeşte valoarea variabilei x, pentru care $f(x) = 0$.
- Funcția f se numeşte **strict crescătoare pe mulțimea** $D(f)$, dacă pentru orice $x_1,\ x_2 \in D(f)$ şi $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.
- Funcția f se numeşte **strict descrescătoare pe mulțimea** $D(f)$, dacă pentru orice $x_1,\ x_2 \in D(f)$ şi $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Fie funcția de gradul I $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ este zeroul funcției f.
- Funcția f este:
  – strict crescătoare, dacă $a > 0$;
  – strict descrescătoare, dacă $a < 0$.
- Numărul α se numeşte ***panta*** (sau ***coeficientul unghiular*** al) graficului funcției f.

2.3. Proporționalitatea directă

• Pentru un zbor Paris–New York se consumă 15 000 de tone de oxigen – cantitate care poate fi restabilită timp de un an de un hectar de pădure.

a) Descrieți analitic dependența dintre cantitatea de oxigen consumată şi numărul de zboruri pe ruta Paris–New York.

b) Câte hectare de pădure pot restabili timp de un an cantitatea de oxigen consumată pentru 50 de zboruri Paris–New York?

Completați adecvat:

a) $f: \mathbb{N} \to \square$, $f(x) = \square \cdot x$.

b) Pentru 50 de zboruri se consumă $50 \cdot \square = \square$ tone de oxigen.

Această cantitate de oxigen poate fi restabilită de $\square$ ha de pădure timp de un an.

Numărul de zboruri și cantitatea de oxigen consumată sunt mărimi direct proporționale.

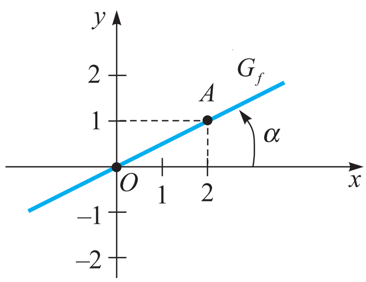
• Reprezentați graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

Rezolvare:

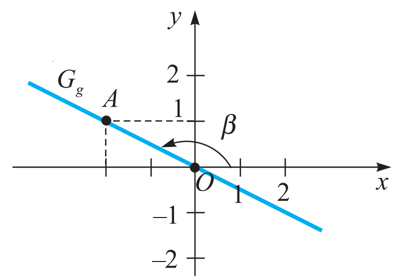
a)

x	0	
$y = f(x)$		



b)

x	0	
$y = g(x)$		



• Cercetați graficele G_f și G_g și răspundeți la întrebări.

1) Este oare funcția f strict crescătoare? Dar funcția g?

2) Ce tip de unghi este unghiul α? Dar unghiul β?

3) Pentru care valori ale variabilei x avem $f(x) > 0$? Dar $f(x) < 0$? Dar $g(x) > 0$? Dar $g(x) < 0$?

4) Are oare funcția f zerouri? Dar funcția g? În caz că funcția are zerou, aflați-l.

Definiții. ♦ Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, se numește **proporționalitate directă**.

♦ Numărul a se numește **coeficient de proporționalitate** (sau **panta** graficului funcției f, sau **coeficientul unghiular** al graficului funcției f).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$

- $a > 0$ → funcția f este strict crescătoare
- $a < 0$ → funcția f este strict descrescătoare

Proporționalitatea directă este un caz particular al funcției de gradul I ($b = 0$).

• Completați propoziția:

Graficul proporționalității directe este ______ ce conține originea ______.

Exerciții și probleme

1

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Selectați formulele prin care poate fi definită funcția f:

a) de gradul I;

b) constantă;

c) proporționalitate directă.

$\boxed{f(x)=-4x}$ $\boxed{f(x)=2{,}5}$ $\boxed{f(x)=2x-5}$ $\boxed{f(x)=x^3}$ $\boxed{f(x)=\frac{1}{x}}$ $\boxed{f(x)=-x-1}$

2. a) Compuneți tabelul de valori pentru funcția $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$, dacă $x \in \{-1;\ 0;\ 0{,}5;\ 2;\ 3\}$.

b) Trasați graficul funcției f.

3. Determinați panta graficului şi reprezentați grafic funcția:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=2x+8$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=2-x$;

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x)=-1{,}5x$; d) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x)=-3{,}5$;

e) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x)=\sqrt{7}$; f) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x)=10x-8$.

4. În ce cadrane se află graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

a) $f(x)=5$; b) $f(x)=-0{,}3$; c) $f(x)=-\sqrt{7}x$; d) $f(x)=\frac{1}{8}x$.

5. Aflați zeroul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=1-10x$; b) $f(x)=\sqrt{3}x+3$; c) $f(x)=4{,}2-2x$; d) $f(x)=-2\sqrt{5}x+\sqrt{10}$.

6. Decideți dacă este strict crescătoare funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=-2x-3$; b) $f(x)=\sqrt{2}x+5$; c) $f(x)=5-4x$; d) $f(x)=1+7x$.

7. Completați astfel încât funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie: 1) strict crescătoare; 2) strict descrescătoare:

a) $g(x)=\ \square\ x$; b) $g(x)=-\ \square\ x$.

8. Stabiliți tipul unghiului format de direcția pozitivă a axei Ox şi graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{21}x+10$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=-3x+8$;

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x)=25x$; d) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x)=-3\sqrt{7}x$;

e) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x)=10$; f) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x)=-\sqrt{7}$.

2

9. Volumul cubului se calculează după formula $V=a^3$, unde a este lungimea muchiei lui. Defineşte oare această formulă o funcție? Este ea oare o funcție de gradul I? Argumentați răspunsul.

10. Perimetrul triunghiului echilateral se calculează prin formula $P=3a$, unde a este lungimea laturii triunghiului. Defineşte oare această formulă o funcţie de gradul I? Este ea o proporționalitate directă? Argumentați răspunsul.

11. Completați astfel încât punctele $A(\square;\square)$, $B(0;\square)$, $C(\square;-1)$, $D(0{,}5;\square)$ să aparţină graficului funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2-5x$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=0{,}2x+3$;

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=2{,}5x$; d) $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ r(x)=-7x$.

12. Tata avea 50 de lei. El a cumpărat câteva kilograme de cartofi la prețul de 4,5 lei/kg.

a) Descrieți analitic dependența dintre rest şi numărul de kilograme de cartofi cumpărate.

b) Aflați domeniul de definiție al funcției definite prin formula obținută la a).

13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=2-10x$; b) $f(x)=5x-2$.

1) Aflați zeroul funcției f.

2) Trasați graficul funcției f.

3) Utilizând graficul, determinați valorile lui x pentru care: $f(x)>0$; $f(x)<0$.

4) Determinați tipul unghiului format de G_f şi direcția pozitivă a axei Ox.

5) Determinați dacă funcția f este strict crescătoare.

14. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $g(x)=6x$; b) $g(x)=-\frac{1}{4}x$.

1) Aflați zeroul funcției g.

2) Trasați graficul funcției g.

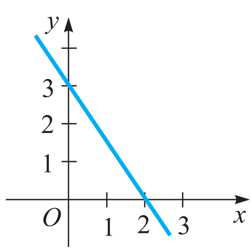
3) Utilizând graficul, determinați valorile lui x pentru care: $g(x)>0$; $g(x)<0$.

4) Determinați tipul unghiului format de G_g şi de direcția pozitivă a axei Ox.

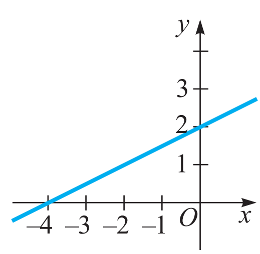
5) Determinați dacă funcția g este strict crescătoare.

15. Definiți analitic funcția de gradul I al cărei grafic este reprezentat:

a)

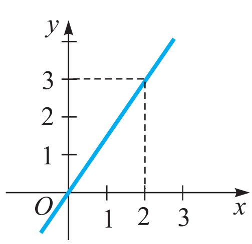


b)

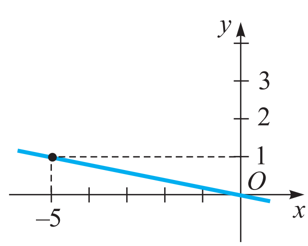


16. Definiți analitic proporționalitatea directă al cărei grafic este reprezentat:

a)



b)



17. Trasați graficul funcției:

a) $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x - 1$, dacă $-2 \le x \le 1$;

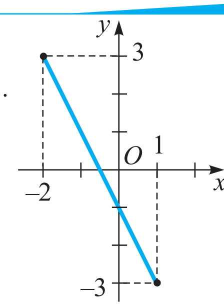
b) $g: D(g) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 6$, dacă $1 \le x \le 5$;

c) $h: D(h) \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x$, dacă $-3 \le x \le 6$;

d) $q: D(q) \to \mathbb{R}$, $q(x) = x$, dacă $0 \le x \le 8$.

Model:

a) $D(f) = [-2; 1]$.



3

18. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2, & \text{pentru } x \le -1 \\ 3x, & \text{pentru } x > -1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{pentru } -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{pentru } x < -1 \\ 2x - 1, & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$

19. Graficul funcției f este o dreaptă ce trece prin punctele $A(2; 6)$ și $B(-1; 3)$. Definiți analitic funcția f.

20. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = 2|x| - 1$;

b) $f(x) = 3 - |x|$.

§3. Proporționalitatea inversă

• Dacă un autobuz parcurge 120 km în t ore, atunci viteza lui este $v = \frac{120}{t}$ km/h. Viteza v este funcție de timpul t.

Mărimile v și t, y și x sunt mărimi ______.

• Fie aria dreptunghiului 25 m², iar lungimea uneia dintre laturi – x m. Atunci, lungimea laturii a doua este $y = \frac{\square}{\square}$ m. Deci, lungimea y a laturii a doua este o funcție de lungimea x.

În ambele cazuri obținem funcții descrise de formula $f(x) = \frac{k}{x}$.

Definiție. Funcția de forma $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, unde $k \in \mathbb{R}^*$, se numește **proporționalitate inversă**.

• Trasați graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{3}{x}$;

b) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{3}{x}$.

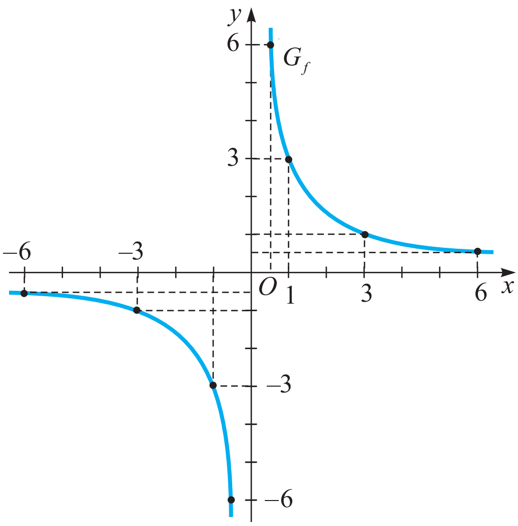
Rezolvare:

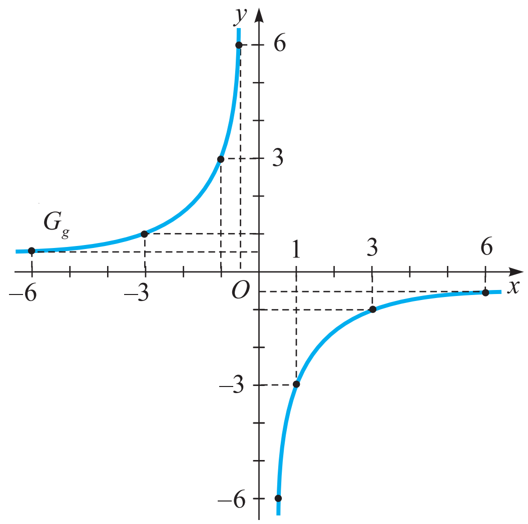
a)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	6	3	1	$\frac{1}{2}$

b)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$g(x)$								





• Examinați graficele G_f și G_g și completați adecvat:

a) Funcția f nu are zerouri.

b) Graficul G_f nu intersectează nici axa Ox, nici axa Oy.

c) $f(x) > 0$ pentru x ________;

$f(x) < 0$ pentru x ________.

d) Funcția f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ și ________.

a) Funcția g ________.

b) Graficul G_g ________.

c) $g(x) > 0$ pentru x ________;

$g(x) < 0$ pentru x ________.

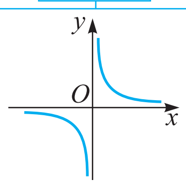
d) Funcția g este strict crescătoare pe intervalele ________ și $(0, +\infty)$.

Graficul proporționalității inverse se numește ***hiperbolă***.
Hiperbola are două ramuri.

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$

Graficul proporționalității inverse este simetric față de originea O a sistemului de axe ortogonale.

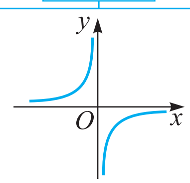
$k > 0$



f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$; ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele I și III

$f(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$
$f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$

$k < 0$



f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$; ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele II și IV

$f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$
$f(x) < 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$

Exerciții și probleme

1

1. Selectați formulele prin care poate fi definită proporționalitatea inversă.

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\quad f(x)=\frac{5}{x}$ $\quad f(x)=-\frac{7}{x}$ $\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad f(x)=x+1$

2. Fie funcția $f\colon \{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\frac{4}{x}$.

a) Compuneți tabelul de valori al funcției f. b) Trasați graficul funcției f.

3. Fie funcția $g\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=\frac{\sqrt{2}}{x}$. Completați tabelul.

x	$-\sqrt{8}$	-2			1	$\sqrt{2}$	2	
$g(x)$			-1	$-\sqrt{2}$				$\frac{1}{2}$

4. *Adevărat* sau *Fals*?

Fie $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{5}{x}$.

a) $A(1,-5)\in G_f$; b) $B(1,5)\in G_f$; c) $C(10,2)\in G_f$;

d) $D(-5,1)\in G_f$; e) $O(0,0)\in G_f$; f) $F\left(-25,-\frac{1}{5}\right)\in G_f$.

5. În care cadrane sunt situate ramurile hiperbolei, dacă:

a) $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\frac{\sqrt{10}}{x}$; b) $g\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=\frac{100}{x}$?

2

6. Trasați graficul funcției:

a) $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{6}{x}$; b) $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\frac{10}{x}$.

Completați adecvat:

1) f este o funcție strict ____;

2) $f(x)>0$ pentru $x\in$ ____;

$f(x)<0$ pentru $x\in$ ____.

3) Ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele ____ și ____.

7. Reprezentați grafic funcția:

a) $f\colon D(f)\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{12}{x}$, pentru $x\in[-4,4]\setminus\{0\}$;

b) $g\colon D(g)\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=-\frac{20}{x}$, pentru $x\in[-10,10]\setminus\{0\}$.

8. Graficul funcției $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x}$, trece prin punctul $A(2,1)$. Trece oare G_f prin punctul:

a) $B(1,2)$; b) $C(-2,-1)$; c) $D(-1,-2)$; d) $E\left(-2,\frac{1}{2}\right)$?

9. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{1}{x},$ și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x)=-\frac{1}{x}$. Trageți concluzia.

10. Scrieți formula prin care este definită proporționalitatea inversă, știind că graficul acesteia trece prin punctul:
a) $A(-3, 12)$; b) $B(8, 4)$.

11. Formulați exemple de mărimi invers proporționale din diverse domenii.

3

12. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:
a) $f(x)=\frac{2}{|x|}$; b) $f(x)=-\frac{2}{|x|}$.
Trageți concluzia.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$, prin metoda grafică, ecuația:
a) $\frac{6}{x}=5+x$; b) $-\frac{3}{x}=4x-1$; c) $\frac{2}{|x|}=x+1$.

14. Demonstrați că, pentru $k<0$ și $a<0$, graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x},$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=ax+3,$ se intersectează în cadranele II și IV.

15. Compuneți și rezolvați câte un exercițiu de tipul exercițiilor **8**, **10**, **11**, **12**.

§4. Funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

$\mathcal{A}=a^2$

• Descrieți analitic dependența dintre lungimea a a laturii pătratului și aria acestuia.

Explicăm

Cum aria pătratului cu latura de lungime a este $\mathcal{A}=a^2$, obținem $a=$ ☐. Deci, lungimea laturii pătratului este funcție de aria lui.

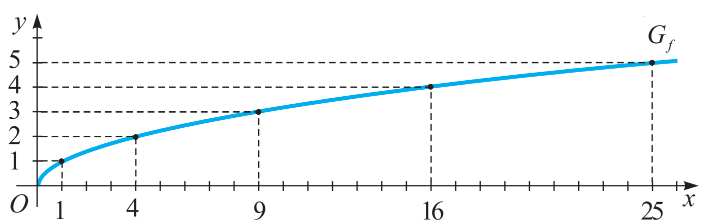
Formula prin care se descrie dependența respectivă este de forma $y=\sqrt{x}$.

Definiție. Funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, se numește **funcția *rădăcina pătrată***.

• Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$.

Rezolvare:

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$		1				



Proprietăți ale funcției $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$:

- $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \boxed{}$ – zeroul funcției f;
- $f(x)>0$ pentru $x\in \boxed{}$;
- pentru orice numere pozitive x_1 și x_2, unde $x_1<x_2$, avem $\sqrt{x_1}\ \boxed{}\ \sqrt{x_2}$, deci, funcția f este strict $\boxed{}$;
- $O(0,\ 0)\in G_f$.

• *Adevărat* sau *Fals*?

a) Punctul $A(36,\ 6)$ aparține graficului funcției *rădăcina pătrată*.

b) Punctul $B(10,\ -3)$ aparține graficului funcției *rădăcina pătrată*.

Rezolvare:

a) $x=36,\ y=\sqrt{\boxed{}}=\boxed{}$. *Răspuns*:

b) $x=10,\ y=\sqrt{\boxed{}}\neq\boxed{}$. *Răspuns*:

Exerciții și probleme

1

1. Fie $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$. Aflați x, dacă $y\in\left\{1{,}5;\ 3\frac{1}{3};\ 5;\ 7;\ 8{,}1\right\}$.

2. Utilizând graficul funcției *rădăcina pătrată*, calculați y pentru $x\in\{1{,}5;\ 2;\ 7;\ 8;\ 20;\ 24\}$. (Rotunjiți până la zecimi.)

3. *Adevărat* sau *Fals*?
Fie G_f graficul funcției *rădăcina pătrată*.

a) $A(1,\ 2)\in G_f$; b) $B(100,\ 10)\in G_f$;
c) $C(1,\ -1)\in G_f$; d) $D(81,\ 9)\notin G_f$;
e) $E(3,\ \sqrt{3})\in G_f$; f) $F(0{,}01;\ 0{,}1)\in G_f$.

4. Stabiliți dacă graficul funcției *rădăcina pătrată* intersectează dreapta:
a) $y=\sqrt{2}$; b) $y=3{,}5$; c) $y=101$; d) $y=-\sqrt{5}$.

2

5. Utilizând graficul funcției *rădăcina pătrată*, comparați numerele:

a) $\sqrt{4{,}5}$ și $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{13{,}5}$ și 3;
c) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ și 2,1; d) $-\sqrt{11}$ și –2,5;
e) $-\sqrt{29}$ și $-\sqrt{27}$; f) 0 și $\sqrt{1{,}1}$.

6. Graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$, trece prin punctul de abscisă:
a) 49; b) 0,04; c) 121; d) 625.
Aflați ordonata acestui punct.

7. Aflați toate valorile întregi ale argumentului x pentru care valorile lui $y = \sqrt{x}$ sunt mai mici decât 10.

8. Trasați graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$, dacă:
a) $0 \le x \le 9$; b) $4 \le x \le 16$.

3

9. Reprezentați grafic funcția $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; b) $f(x) = \sqrt{|x|}$; c) $f(x) = (\sqrt{x})^2$; d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

10. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sqrt{x} - 3$; b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$; c) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$; d) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x} = x - 2$; b) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$; c) $\sqrt{x} = 6 - x$; d) $x + \sqrt{x} + 1 = 0$.

12. Compuneți și rezolvați câte un exercițiu de tipul exercițiilor **9–11**.

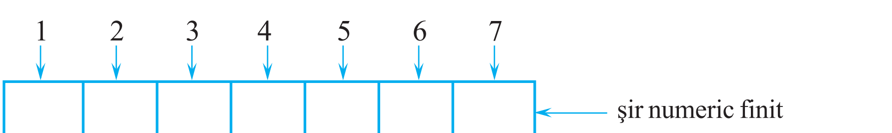
§5. Șiruri numerice

5.1. Noțiunea de șir numeric

1 Pentru a participa la competițiile liceale la baschet, Vasile a început să se antreneze zilnic. În prima zi el s-a antrenat 20 de minute, iar în fiecare dintre următoarele zile, pe parcursul unei săptămâni, majora cu 5 minute durata antrenamentelor. Câte minute a durat antrenamentul lui Vasile în ziua a șaptea a săptămânii?

Explicăm

Reprezentăm datele problemei schematic astfel:



Răspuns: ☐ minute.

2 Scriem în ordine crescătoare numerele naturale impare:

$\boxed{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots}$ ⟵ şir numeric infinit

Notăm: $a_1 = 1$, $a_2 = \square$, $a_6 = \square$ ⟵ termeni ai şirului

3 Fie funcţia $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Deci, $f(1) = 1$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$, $f(3) = \dfrac{1}{3}$, ..., $f(n) = \dfrac{1}{n}$, ...

$\boxed{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n},\ \ldots}$ ⟵ şir numeric $\square$

Notăm: $a_2 = \square$, $a_7 = \square$, $a_{53} = \square$, $a_n = \square$.

Definiţii. ♦ **Şir numeric** se numeşte funcţia definită pe $\mathbb{N}^*$ cu valori în mulţimea E, $E \subset \mathbb{R}$.

♦ Dacă funcţia f este definită pe o submulţime finită a elementelor consecutive ale mulţimii $\mathbb{N}^*$, atunci se obţine un şir **numeric finit**. În caz contrar, şirul obţinut se numeşte **şir numeric infinit**.

termeni vecini

$a_1,\quad \underbrace{a_2,\quad a_3}_{}$, ..., $a_{n-1},\quad a_n,\quad a_{n+1}$, ...

predecesorul termenului a_2 — succesorul termenului a_n

Şirul numeric se notează cu (a_n), iar termenii lui – cu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

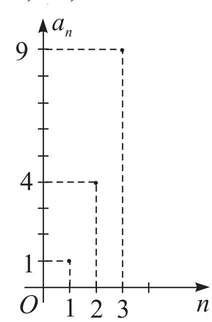
5.2. Moduri de definire a unui şir

Explicăm

1 Cum şirul numeric este o funcţie, el, ca şi funcţia, poate fi definit:

sintetic — *prin enumerarea termenilor lui* ⟶ 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

sintetic — *grafic* ⟶



analitic ⟶ *prin formula termenului al n-lea* ⟶ $a_n = n^2$

verbal ⟶ *prin cuvinte* ⟶ şirul pătratelor numerelor naturale

Definiţie. Formula cu ajutorul căreia fiecare termen al şirului numeric se exprimă prin numărul său de ordine (rangul său) se numeşte **formula termenului general** sau **formula termenului de rang *n*** al şirului.

2 Examinaţi şi continuaţi:

a) Scriem primii cinci termeni ai şirului (a_n) definit prin formula termenului de rang n: $a_n = 3^n - 2$.

$a_1 = 3^1 - 2 = 1$, $a_2 = 3^{\square} - 2 = \square$, $a_3 = \square$, $a_4 = \square$, $a_5 = \square$.

b) Scriem formula termenului de rang n al şirului (a_n) definit prin enumerarea termenilor săi: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

Deoarece $2 = \frac{2}{1}$, obţinem şirul (a_n): $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$, cu $a_n = \frac{\square}{n}$.

Observaţie. Pentru şirul definit prin enumerarea câtorva dintre primii săi termeni, se pot scrie, de regulă, mai multe formule pentru termenul de rang n.

Fie şirul numeric: 0, 7, 14, 21, …

$a_1 = 0$, $a_2 = 0 + 7 = 7$, $a_3 = 7 + 7 = 14$, $a_4 = 14 + 7 = 21$, …

Şirul poate fi definit astfel: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 7$.

Un atare mod de definire a şirului se numeşte ***recurent*** (*recurrere* în limba greacă înseamnă a reveni).

3 Observaţi şi continuaţi:

Pentru a defini în mod recurent şirul:

se indică unul sau câţiva dintre primii termeni ai şirului →	$a_1 = 1$, $a_2 = 1$
se scrie formula ce permite obţinerea termenilor următori ai şirului, cunoscând termenii precedenţi →	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2;$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3;$

$a_5 = a_4 + a_3 = \square + \square = \square;$

$a_6 = \square + \square = \square + \square = \square.$

Am obţinut şirul 1, 1, 2, 3, $\square$, $\square$, ..., care se numeşte şirul lui Fibonacci.

INTERESANT ŞI UTIL

Şirul lui Fibonacci se aplică în diverse compartimente ale matematicii: în geometrie, combinatorică, teoria numerelor, analiza matematică. Câteva decenii matematicienii au încercat să definească şirul lui Fibonacci prin formula termenului lui de rang n. Într-un final, această formulă a fost găsită:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1175–1250)

5.3. Șiruri numerice monotone

• Examinați șirurile:

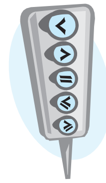
(a_n): 2, 4, 6, 8, …, $2n$, …

(b_n): 3, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{3}{4}$, …, $\frac{3}{n}$, …

(c_n): 1, 1, 1, 1, …

(x_n): 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

șirul lui Fibonacci



Comparați:

a_{n+1} ◯ a_n

b_{n+1} ◯ b_n

c_{n+1} ◯ c_n

x_{n+1} ◯ x_n

Definiții. ♦ Un şir numeric se numeşte **strict crescător** dacă fiecare termen al lui este mai mare decât predecesorul său: $a_{n+1} > a_n$.

♦ Un şir numeric se numeşte **crescător** dacă fiecare termen al lui nu este mai mic decât predecesorul său: $a_{n+1} \geq a_n$.

♦ Un şir numeric se numeşte **strict descrescător** dacă fiecare termen al lui este mai mic decât predecesorul său: $a_{n+1} < a_n$.

♦ Un şir numeric se numeşte **descrescător** dacă fiecare termen al lui nu este mai mare decât predecesorul său: $a_{n+1} \leq a_n$.

♦ Un şir numeric se numeşte **constant** dacă fiecare termen al acestuia este egal cu predecesorul său: $a_{n+1} = a_n$.

Aplicând definițiile respective, completați adecvat:

(a_n) – șir numeric strict crescător; (b_n) – ______;

(c_n) – ______; (x_n) – ______.

Definiție. Șirurile numerice crescătoare, strict crescătoare, descrescătoare și strict descrescătoare se numesc **monotone**.

Șirul (y_n): 2, 1, 4, 3, 6, …, $n+(-1)^n$, … nu este monoton.

Exerciții și probleme

1

1. Scrieți în ordine crescătoare șirul de numere naturale impare formate dintr-o cifră.

2. Scrieți în ordine crescătoare primii cinci termeni ai șirului de numere naturale divizibile cu 3.

3. Scrieți în ordine descrescătoare șirul fracțiilor subunitare cu numitorul 5.

4. Scrieți primii cinci termeni ai șirului definit prin formula termenului de rang n:

a) $a_n = 5 - 3n$; b) $a_n = n^2 - n$; c) $a_n = \frac{2n}{n+1}$; d) $a_n = 3 \cdot (-1)^n$.

5. Fie şirul (x_n). Scrieţi:
a) doi termeni consecutivi ai şirului, precedenţi termenului x_{n+1};
b) doi termeni consecutivi ai şirului, următori pentru termenul x_{n+1}.

6. Aflaţi termenii al treilea, al şaptelea şi al o sutălea ai şirului (c_n) definit prin formula termenului general $c_n = \dfrac{3}{n+1}$.

7. Utilizând modelul, determinaţi dacă numerele 3, 5, 17 sunt termeni ai şirului definit prin formula termenului de rang n:
a) $a_n = 3n - 1$; b) $b_n = 2n^2 + 1$.

8. Şirul (b_n) este definit în mod recurent: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n + 1$. Scrieţi primii cinci termeni ai acestui şir.

Model:
a) $a_n = 3n - 1$. Rezolvăm în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia: $3n - 1 = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3n = 4 \Leftrightarrow n = \dfrac{4}{3} \notin \mathbb{N}^*$.
Răspuns: Numărul 3 nu este termen al şirului (a_n).

2

9. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului:
a) numerelor naturale care, împărţite la 4, dau restul 3;
b) al cărui termen general a_n este egal cu restul împărţirii lui n la 3.

10. Scrieţi şi reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale cinci termeni ai şirului definit prin formula: a) $a_n = 2\cdot(-1)^n$; b) $a_n = 1 - n$.

11. Aflaţi termenii al treilea, al şaptelea şi al doisprezecelea ai şirului definit prin formula:
a) $a_n = \dfrac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{2}$; b) $b_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$; c) $c_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

12. Determinaţi care dintre şirurile de mai jos este definit prin formula $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2+1}$:
a) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{7}{13}, \dfrac{13}{21}, \ldots$; b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{11}, \ldots$; c) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{17}, \ldots$

13. Aparţine şirului definit prin formula termenului general $a_n = n^2 - 7n + 23$ numărul:
a) 11; b) 31; c) 46?

14. Câţi termeni negativi conţine şirul definit prin formula $a_n = 5n - 21$?

15. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului definit în mod recurent:
a) $a_1 = 27$, $a_{n+1} = \dfrac{81}{a_n}$;
b) $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = -0{,}1$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;
c) $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$;
d) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 5$.

16. Demonstraţi, utilizând modelul, că şirul definit prin formula:
a) $a_n = 2 - 3n$ este strict descrescător;
b) $a_n = 2n - 5$ este strict crescător.

Model:
Demonstraţi că şirul definit prin formula $a_n = \dfrac{1}{5}n + 2$ este strict crescător.
Demonstraţie:
$a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(n+1) + 2$;
$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{5}n + \dfrac{1}{5} + 2 - \dfrac{1}{5}n - 2 = \dfrac{1}{5} > 0$;
$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$.
Deci, şirul (a_n) este strict crescător.

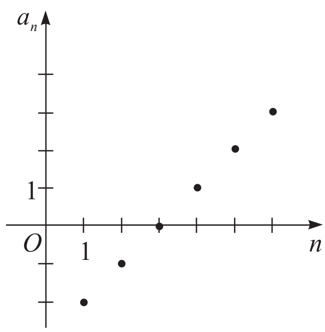
3

17. Definiți, prin una dintre posibilele formule ale termenului de rang n, șirul:

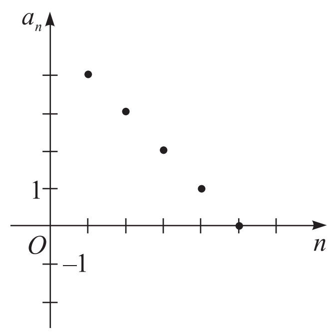
a) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$; b) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$; c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$

18. Șirul finit este definit grafic. Definiți analitic acest șir.

a)



b)



19. Definiți în mod recurent șirul:

a) $5, -5, 5, -5, \ldots$;

b) $1, 2, -1, -3, 2, 5, -3, -8, \ldots$

20. Șirurile (x_n) și (y_n) sunt definite prin formulele termenilor de rang n: $x_n = 2n - 1$ și $y_n = n^2$. Dacă se vor scrie în ordine crescătoare termenii comuni ai acestor două șiruri, se va obține un nou șir (c_n). Definiți acest șir prin formula termenului de rang n.

21. Demonstrați că șirul definit prin formula:

a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ este strict descrescător;

b) $c_n = \frac{3n+4}{n+2}$ este strict crescător.

22. Șirul (a_n) este definit prin formula termenului general $a_n = 2^n$.
Este adevărată relația $a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$?

Exerciții și probleme recapitulative

1

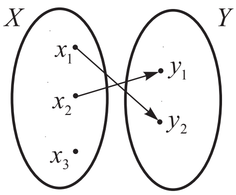
1. Determinați cele trei componente ale funcției:

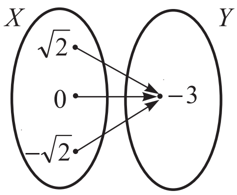
a) $f:\{-2, -1, 0, 1, 2\}\to\{0, 1, 4\},\ f(x)=x^2$;

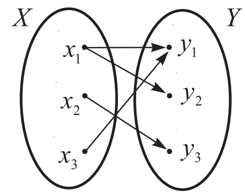
b) $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q},\ g(x)=\frac{1}{x}$;

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=3x-10$.

2. Care dintre diagrame definește o funcție?

a) 

b) 

c) 

3. Selectați formulele prin care poate fi definită:

a) funcția de gradul I;

b) funcția constantă;

c) proporționalitatea directă;

d) proporționalitatea inversă;

e) funcția *rădăcina pătrată*.

$\boxed{f(x)=2-3x}$ $\boxed{g(x)=-\sqrt{10}}$ $\boxed{p(x)=x^2+1}$ $\boxed{h(x)=6,(7)x}$ $\boxed{r(x)=\sqrt{x}}$ $\boxed{g(x)=-\frac{1}{3x}}$

4. Descrieți printr-un tabel funcția:

a) $f:\{-3, -2, 0, 1, 3, 5\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2x+4$;

b) $f:\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\to\mathbb{N},\ f(x)=|x|$;

c) $f:\{x\in\mathbb{N}\mid -2x\geq 9\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x^2+1$.

5. Calculați $f(1),\ f(-2),\ f(5),\ f(0{,}1)$, dacă:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-8$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2,(3)$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{21}{x}$;

d) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$.

6. *Adevărat* sau *Fals*?

A/F

Următoarele scrieri definesc o funcție:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2|x|$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{3}{x}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N},\ f(x)=x+1$.

Justificați.

7. Aflați domeniul de definiție al funcției definite prin formula:

a) $f(x)=\sqrt{x}+2$;

b) $f(x)=\frac{1}{x-3}$;

c) $f(x)=(x-3)^2+1$;

d) $f(x)=-5\sqrt{x-2}$;

e) $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$;

f) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.

8. Completați cu numărul potrivit:

a) $A\left(\frac{2}{3};\ \boxed{}\right)\in G_f$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+10$;

b) $B(2{,}5;\ \boxed{}\ )\in G_f$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-20x$;

c) $C(\ \boxed{}\ ;\ -11)\in G_f$, unde $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{8}{x}$;

d) $D(\ \boxed{}\ ;\ 100)\in G_f$, unde $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$.

9. Scrieți primii șase termeni ai șirului (c_n) definit în mod recurent: $c_1=2,\ c_2=1,\ c_{n+1}=2c_{n-1}$.

10. Șirul (a_n) este definit prin formula termenului general $a_n=3n-4$.
a) Scrieți primii zece termeni ai șirului.
b) Reprezentați termenii obținuți într-un sistem de axe ortogonale.

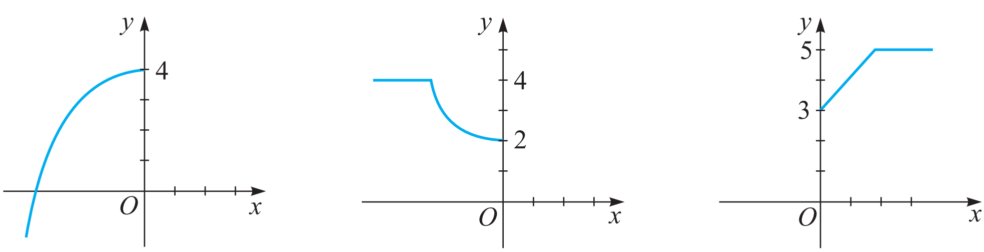
11. Aflați termenul al șaptelea al șirului (a_n): $-7,\ -3,\ 1,\ 5,\ \ldots$

2

12. Trasați graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, dacă:
a) $a=5,\ b=-2$; b) $a=0,\ b=0$; c) $a=0,\ b=-3{,}5$;
d) $a=-5,\ b=0$; e) $a=2{,}5,\ b=0$;
f) $a=b=-1$; g) $a=b=8$.

13. Numărul natural m, la împărțirea cu 4, dă câtul n și restul 0. Definiți printr-o formulă dependența dintre m și n.
a) Determinați valoarea funcției pentru $n=100$.
b) Aflați domeniul de definiție și mulțimea de valori ale funcției.

14. Completați graficul, astfel încât el:
a) să fie graficul unei funcții; b) să nu reprezinte graficul unei funcții.



15. Trasați graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=1{,}5x-2$; b) $f(x)=-2x-3$; c) $f(x)=-x+3{,}6$.
Determinați proprietățile funcției f.

16. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{k}{x}$, dacă:
a) $k=-\frac{1}{2}$; b) $k=0{,}2$; c) $k=-\frac{2}{5}$; d) $k=1\frac{2}{3}$.
Determinați proprietățile funcției f.

17. Completați cu un număr, astfel încât funcția f să fie:

1) strict crescătoare; 2) strict descrescătoare.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \square \cdot x + 1;$ b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \square \cdot x;$

c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\square}{x};$ d) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{\square}{x};$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\square \cdot x - \sqrt{5};$ f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\square \cdot x.$

18. Trasați graficul funcției $f: D(f) \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 2$, dacă $-5 \le x \le 5$;

b) $f(x) = -3{,}8x$, dacă $0 \le x \le 7$;

c) $f(x) = -\dfrac{1}{4x}$, dacă $1 \le x \le 6$;

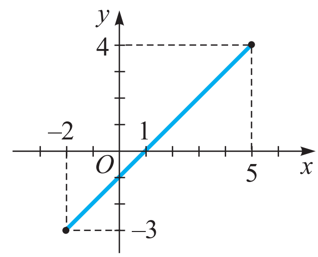
d) $f(x) = \dfrac{5}{x}$, dacă $-7 \le x \le -1$;

e) $f(x) = -3$, dacă $-5 \le x \le 2$.

Model:

$f: D(f) \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1,$

dacă $-2 \le x \le 5$.



19. Completați cu un număr, astfel încât graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \square \cdot x - 5;$ b) $f(x) = -\square \cdot x + \sqrt{11};$

c) $f(x) = \square \cdot x;$ d) $f(x) = -\square\, x$

să formeze cu direcția pozitivă a axei Ox:

1) un unghi ascuțit; 2) un unghi obtuz.

20. Graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$, trece prin punctul cu abscisa:

a) 25; b) 100; c) 144.

Aflați ordonata punctului.

21. Determinați dacă graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conține puncte care au abscisa egală cu ordonata:

a) $f(x) = -3x + 1;$ b) $f(x) = x - 0{,}8;$

c) $f(x) = -5x;$ d) $f(x) = 2x + \sqrt{5}.$

22. Se știe că suma de bani care se investește (sau se împrumută) pe un termen de t ani cu rata dobânzii de r% anual se calculează conform formulei $S = L(1 + rt)$, unde L este suma inițială de lei. Fie L și r mărimi fixate.

a) Ce dependență există între S și t? Justificați.

b) Domnul Mogoreanu a investit în construcție 10 000 de lei cu rata dobânzii de 17% anual. Ce sumă va primi el, dacă termenul de împrumut este de: 1 an; 2 ani; x ani? Scrieți dependența lui S de t în cazul investiției banilor pentru x ani.

c) Cu ce este egal coeficientul unghiular al graficului funcției obținute la b)? Ținând cont de condițiile problemei, care este sensul coeficientului unghiular?

23. Şirul (x_n) este definit prin formula termenului general $x_n = -n^2 + 4n$. Aflați rangul termenului -45 al acestui şir.

24. Începând cu care rang toți termenii şirului definit prin formula termenului general $a_n = 5n - 1$ sunt mai mari decât 100?

25. Fie funcția $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$.

a) Aflați termenul al şaselea al şirului numeric asociat acestei funcții.

b) Aflați rangul termenului 64 al acestui şir.

3

26. Aparține oare graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 5,$ punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 5,$ şi $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x - 5$? Argumentați.

27. În acelaşi sistem de axe ortogonale trasați graficele funcțiilor:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|,$ şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -|x|;$

b) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{3}{|x|},$ şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -\dfrac{3}{|x|};$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|},$ şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -\sqrt{|x|}.$

Trageți concluzia.

28. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x + 1.$

a) Calculați $f(f(-2));\ f(f(f(0))).$

b) Pentru care valori ale lui x, $f(x) = f(f(x))$?

29. Trasați graficul funcției $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4} - 5;$

b) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{1 - 3x} + 2;$

c) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dacă } x \le 4 \\ 2\sqrt{x}, & \text{dacă } x > 4; \end{cases}$

d) $f(x) = x\sqrt{x^2}.$

30. O bilă se rostogoleşte pe o pantă. În prima secundă ea parcurge 0,6 m, iar în fiecare dintre secundele următoare viteza ei creşte cu 0,6 m/s. Cât timp se va rostogoli bila pe o pantă cu lungimea de 6 metri?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

4

1. a) Completați astfel încât funcția

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \square\, x + 3,$ să fie strict descrescătoare.

b) Reprezentați grafic funcția f.

c) Aflați zeroul funcției f.

d) Determinați semnul funcției f.

e) Precizați panta graficului funcției f.

1

2. *Adevărat* sau *Fals*?

A/F Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{7}{x}$.

$A\left(\dfrac{1}{7}, 49\right) \in G_f$.

1

3. Aflați valoarea funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, pentru valoarea argumentului 961.

2

4. a) Scrieți formula ce exprimă dependența lungimii cercului de raza acestuia.

b) Este această dependență o proporționalitate directă? Argumentați răspunsul.

2

5. Un șir (x_n) este definit prin formula termenului de rang n:

$$x_n = n^2 - 7n + 6.$$

a) Scrieți primii cinci termeni ai șirului.

b) Determinați rangul termenului egal cu 24 al acestui șir.

Varianta 2

1. a) Completați astfel încât funcția

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \square\, x - 5,$ să fie strict crescătoare.

b) Reprezentați grafic funcția g.

c) Aflați zeroul funcției g.

d) Determinați semnul funcției g.

e) Precizați panta graficului funcției g.

2. *Adevărat* sau *Fals*?

A/F Fie $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{15}{x}$.

$B\left(-\dfrac{1}{3}, -5\right) \in G_g$.

3. Aflați valoarea funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, pentru valoarea argumentului 841.

4. a) Scrieți formula care exprimă dependența vitezei v de timpul t, fiind dată distanța s.

b) Este această dependență o proporționalitate inversă? Argumentați răspunsul.

5. Un șir (x_n) este definit prin formula termenului de rang n:

$$x_n = n^2 - n.$$

a) Scrieți primii cinci termeni ai șirului.

b) Determinați rangul termenului egal cu 6 al acestui șir.

6 capitolul

Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică

Deseori în viață folosim termenii: *eveniment*, *întâmplător*, *aleator*, *posibil*, *probabil*, *sigur*, *șansă*, *probabilitate*. Ce înseamnă acești termeni? De ce trebuie să-i cunoaștem? Când și cum îi putem utiliza?

Răspunsurile la întrebările de mai sus le vom găsi în acest capitol.

§1. Noțiunea de eveniment

Cercetăm

1. Se aruncă un zar. Ce rezultat vom obține în urma experimentului „Aruncarea zarului”?

2. Daniela a cumpărat un bilet de loterie. Acest bilet poate fi câștigător sau nu. Există oare alte cazuri posibile?

3. Fie experimentul „Aruncarea unei mingi de baschet la coș”. Care sunt rezultatele posibile ale acestui experiment?

Rezolvare:

1. Nu putem prevedea care dintre fețele marcate cu punctele 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 va apărea. Deci, se va obține întâmplător (aleator) una dintre fețe.

2. Desigur, biletul poate fi câștigător sau nu. Alte cazuri posibile nu există.

3. În urma experimentului „Aruncarea unei mingi de baschet la coș” pot fi atestate două rezultate: marcare sau nu.

Aruncarea zarului, cumpărarea biletului de loterie, aruncarea mingii de baschet la coș sunt exemple de experimente.

Definiții. ♦ O repetare a unui experiment se numește **probă**.
♦ Rezultatul unui experiment se numește **eveniment**.

De exemplu, „Apariția feței marcate cu 5 puncte” este un eveniment al experimentului „Aruncarea zarului”; „Biletul nu este câștigător” este un eveniment al experimentului „Participarea la loterie”.

Există multe evenimente despre care nu putem spune cu certitudine dacă se vor realiza sau nu. De exemplu, evenimentele „Apariția feței zarului cu 3 puncte”, „Marcarea mingii la aruncarea acesteia la coş” nu pot fi anticipate cu siguranță. Acestea depind de mulți factori întâmplători şi sunt numite *evenimente aleatoare*.

Definiție. Eveniment aleator se numeşte evenimentul care, în urma efectuării experimentului, se poate realiza, dar poate şi să nu se realizeze.

Evenimentul „Apariția uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte la aruncarea zarului” este un eveniment sigur, iar evenimentul „Extragerea a două creioane de culoare verde din cutia cu creioane de culoare albastră sau roşie” este un eveniment imposibil. Evenimentul „O pisică vorbeşte”, de asemenea, este un eveniment imposibil.

Definiții. ♦ **Eveniment imposibil** se numeşte evenimentul care nu se realizează niciodată. Evenimentul imposibil se notează cu $\varnothing$.

♦ **Eveniment sigur** se numeşte evenimentul care se realizează în urma oricărei probe. Evenimentul sigur se notează, de regulă, cu E.

De exemplu, evenimentul „După marți urmează duminică” este un eveniment imposibil, iar evenimentul „După iunie urmează luna iulie” este un eveniment sigur.

Evenimentele pot fi clasificate în sigure, imposibile şi aleatoare.
Evenimentele se notează, de regulă, cu litere majuscule: A, B, C, ...
Evenimentul este legat de experimentul dat.

Atenție! În cadrul unui experiment există un număr de cazuri posibile şi un număr de cazuri favorabile pentru evenimentul dat, din numărul de cazuri posibile.

***Exemple.* 1.** La aruncarea unei monede sunt două posibilități: {apariția stemei, apariția valorii}. Deci, avem două evenimente aleatoare: A = {apariția feței cu stema}; B = {apariția feței cu valoarea}.

Atât evenimentul A, cât şi evenimentul B, au câte un singur caz favorabil din două cazuri posibile.

2. La aruncarea unui zar poate apărea una dintre fețele marcate cu punctele 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prin urmare, există şase posibilități: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Observație. La aruncarea unui zar pot fi definite şi alte evenimente, nu numai apariția feței cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. Astfel de evenimente vor fi cercetate în continuare.

Există evenimente care au şanse egale de realizare. De exemplu, dacă într-o cutie sunt tot atâtea creioane albastre câte roşii, atunci evenimentul B = {creionul extras este albastru} şi evenimentul C = {creionul extras este roşu} au aceeaşi şansă de realizare. În cazul în care numărul creioanelor roşii din cutie este mai mare decât numărul creioanelor albastre, evenimentul C are o probabilitate mai mare de realizare decât evenimentul B.

Aplicăm

La aruncarea unui zar examinăm evenimentele:

A_1 = {apariția feței cu numărul 1};
A_2 = {apariția feței cu numărul 3 sau 4};
A_3 = {apariția feței cu numerele 1, 2 şi 3};
A_4 = {apariția feței cu un număr par};
A_5 = {apariția feței cu un număr impar};
A_6 = {apariția feței cu un număr mai mic decât 5};
A_7 = {apariția uneia dintre fețele cu numerele 1, 2, 3, 4, 5 sau 6}.

1) Corelați termenii „eveniment sigur", „eveniment posibil", „eveniment mai posibil decât", „eveniment imposibil", „evenimente egal posibile" cu evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.

2) Determinați numărul de cazuri favorabile pentru fiecare dintre evenimentele A_1–A_7.

Rezolvare:

1) Evenimentele A_1, A_2, A_4, A_5, A_6 sunt posibile; evenimentul A_3 este imposibil; evenimentul A_7 este sigur; evenimentul A_2 este mai posibil decât evenimentul A_1; evenimentul A_6 este mai posibil decât evenimentul A_2; evenimentele A_4 şi A_5 sunt egal posibile. (Propuneți şi alte relații.)

2) Evenimentul A_1 are un singur caz favorabil; A_2 are 2 cazuri favorabile; A_3 nu are cazuri favorabile; A_4 are 3 cazuri favorabile; A_5 are 3 cazuri favorabile; A_6 are 4 cazuri favorabile; A_7 are 6 cazuri favorabile din 6 cazuri posibile.

Elementele mulțimii cazurilor posibile ale unui experiment aleator se numesc **evenimente elementare**.

Exemple. a) La aruncarea unui zar evenimentele $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ sunt elementare. Evenimentul „Apariția unui număr impar" nu este elementar.

b) La aruncarea unei monede sunt două evenimente elementare: {apariția stemei}, {apariția valorii}.

Evenimentele unui experiment aleator se consideră **egal posibile**, dacă se poate afirma cu certitudine că fiecare are aceeaşi şansă de a se produce.

***Exemple.* 1.** Evenimentele A_4 şi A_5, la aruncarea zarului, sunt egal posibile.

2. La aruncarea zarului avem 6 evenimente egal posibile, referitoare la apariția feței cu unul dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Observație. Noțiunea de evenimente egal posibile ne permite să comparăm două evenimente aleatoare din punctul de vedere al şansei de a se produce. Evenimente sigure şi imposibile se întâlnesc mai rar. De fapt, trăim în lumea experimentelor şi evenimentelor aleatoare (întâmplătoare). De aceea este important să ştim dacă putem găsi unele legități în lumea evenimentelor aleatoare. Putem oare determina şansa realizării evenimentului aleator care ne interesează?

Răspunsuri la astfel de întrebări ne dă ştiința care se numeşte **Teoria probabilităților** (un compartiment important al matematicii).

Exerciții și probleme

1

1. Indicați câteva evenimente pentru experimentul:
   a) Se ia la întâmplare un număr din mulțimea $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$;
   b) Se aruncă o monedă de trei ori;
   c) Se încălzeşte apa până la temperatura de 100°C;
   d) Se joacă o partidă de şah.

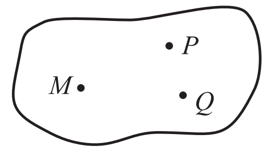
2. Determinați şi scrieți evenimentele elementare ale experimentului:
   a) Se alege o zi a săptămânii;
   b) Se alege şeful clasei din două candidaturi;
   c) Se extrage la întâmplare o bilă dintr-o urnă ce conține 10 bile albe numerotate cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
   d) Se extrage o bilă dintr-o urnă cu bile albe şi negre.

3. Determinați care dintre evenimente este sigur, imposibil, aleator:
   a) În anul 2025 populația Terrei va depăşi 8 miliarde de locuitori.
   b) În anul 2023 în Moldova se vor naşte 25 000 de băieți.
   c) După miercuri urmează marți.
   d) Ziua de naştere a prietenului este pe 30 februarie.
   e) După sâmbătă urmează duminică.
   f) După octombrie urmează decembrie.

2

4. Comparați şansa de producere a evenimentelor A şi B utilizând termenii „e mai posibil decât”, „e mai puțin posibil decât”, „sunt egal posibile”.
   a) Dimineața în care te trezeşti este a unei zile:
      $A = \{$obişnuite (de lucru)$\}$; $B = \{$de odihnă (de sărbătoare)$\}$.
   b) Echipa de fotbal a Republicii Moldova joacă cu echipa de fotbal a Braziliei:
      $A = \{$învinge echipa Republicii Moldova$\}$; $B = \{$învinge echipa Braziliei$\}$.
   c) Se aruncă un zar:
      $A = \{$apare fața cu 6 puncte$\}$; $B = \{$apare o față care nu are 6 puncte$\}$.
   d) S-a dat testul la matematică:
      $A = \{$toți elevii au luat nota 10$\}$; $B = \{$unii elevi au luat nota 10$\}$.

5. Se unesc la întâmplare trei puncte necoliniare. Ce figuri geometrice se pot obține? Care este șansa să obținem un triunghi?



6. Se aruncă simultan două zaruri și se scrie suma punctelor obținute. Ținând cont de rezultatele posibile, dați câte două exemple de:
a) evenimente sigure; b) evenimente imposibile; c) evenimente aleatoare.

7. Formulați exemple de evenimente sigure, imposibile și aleatoare din diverse discipline școlare.

3

8. Dați câte trei exemple de evenimente sigure, imposibile și aleatoare ale experimentelor din diverse domenii sociale.

9. Într-o urnă sunt 5 bile albe, 8 bile negre și 10 bile roșii. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase simultan la întâmplare, astfel încât printre ele să fie:
a) două bile roșii; b) trei bile negre; c) o bilă albă;
d) două bile de culori diferite; e) trei bile de culori diferite.

10. Se aruncă simultan două zaruri. Determinați mulțimea ale cărei elemente reprezintă evenimentul „Obținerea sumei 6”.

11. Într-o secție lucrează 8 bărbați și 4 femei. Au fost alese la întâmplare 2 persoane. Care este șansa ca aceste persoane să fie bărbați?

§2. Noțiunea de probabilitate

2.1. Definiția clasică a probabilității

Cercetăm

1 Calculați șansa ca la o aruncare a unui zar să apară:
a) numărul 1; b) un număr divizibil cu 2; c) un număr mai mic decât 5; d) numărul 8.

Rezolvare:

a) Șansa ca la o aruncare a zarului să obținem 1 punct este una din șase, sau $1:6=0{,}1(6)$.

b) La aruncarea zarului pot apărea oricare dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dintre acestea, numai trei numere (2, 4 și 6) se divid cu 2. Prin urmare, sunt trei șanse din șase ca numărul care apare să se dividă cu 2, adică șansa este $3:6=0{,}5$.

c) Dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, care pot apărea la aruncarea unui zar, numai patru (1, 2, 3 și 4) sunt mai mici decât 5. Deci, sunt patru șanse din șase ca numărul care apare la aruncare să fie mai mic decât 5, adică șansa este $4:6=0,(6)$.

d) Deoarece nicio față a zarului nu are 8 puncte, șansa ca la o aruncare să apară 8 este egală cu 0.

2 Calculați șansa ca la o aruncare a monedei să apară: a) stema; b) valoarea.

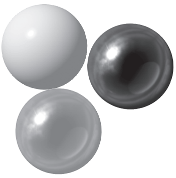
Rezolvare:

a) Șansa ca la o aruncare a monedei să apară stema este una din două sau $1:2=0{,}5$.

Notăm $P(s)=0{,}5$.

b) Șansa ca la o aruncare a monedei să apară valoarea este, de asemenea, una din două, adică $1:2=0{,}5$.

Notăm $P(b)=0{,}5$.



3 Într-o urnă sunt 3 bile albe, 5 bile negre și 4 bile roșii. Calculați șansa ca, extrăgând o bilă la întâmplare, aceasta să fie:

a) albă; b) neagră; c) roșie.

Rezolvare:

a) Șansa să apară o bilă albă poate fi exprimată prin raportul dintre numărul bilelor albe și numărul tuturor bilelor: $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Notăm $P(a)=0{,}25$.

b) Dintre cele 12 bile din urnă, 5 sunt negre. Deci, șansa ca bila să fie neagră este $\frac{5}{12}=0{,}41(6)$.

Notăm $P(n)=0{,}41(6)$.

c) Șansa de a extrage o bilă roșie este $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0,(3)$.

Notăm $P(r)=0,(3)$.

Observăm că, pentru a calcula șansa de realizare a evenimentului respectiv, se află raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experimentului aleator corespunzător evenimentului cercetat. Numărul obținut este numit **probabilitatea evenimentului aleator**.

Definiție. Se numește **probabilitate** a unui eveniment aleator A raportul dintre numărul m de cazuri egal posibile favorabile lui A și numărul n de cazuri egal posibile ale experimentului.

Probabilitatea evenimentului A se notează $P(A)$.

Conform definiției,

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}.} \qquad (1)$$

Formula (1) reprezintă ***definiția clasică a probabilității***.

***Exemple.* 1.** Probabilitatea apariției „stemei” la aruncarea monedei este $P(s)=0{,}5$, iar probabilitatea apariției „valorii” este $P(b)=0{,}5$, deoarece $m=1$, iar $n=2$.

2. Probabilitatea apariției feței cu 4 puncte la aruncarea unui zar este $P(4)=\frac{1}{6}$, deoarece $m=1$, iar $n=6$.

Observație. Uneori, probabilitatea se exprimă în procente.

Astfel, pentru evenimentul „Apariția stemei”, $P(s)=50\%$; pentru evenimentul „Apariția valorii”, $P(b)=50\%$.

Probabilitatea se aplică pe larg în viață, în știință, în economie, în sociologie etc. De exemplu, dacă la prognoza meteo s-a anunțat că „mâine va ploua cu probabilitatea de 70%”, aceasta nu înseamnă că obligatoriu va ploua, dar şansele sunt destul de mari. Ieşind din casă, ar fi bine să luăm umbrela.

2.2. Proprietățile probabilității

Din definiția probabilității rezultă ***proprietățile probabilității***:

$1°$ Probabilitatea evenimentului sigur E este 1. Deci, $P(E)=1$.

Într-adevăr, deoarece $m=n$, conform (1), obținem $P(E)=\frac{n}{n}=1$.

$2°$ Probabilitatea evenimentului imposibil este 0. Deci, $P(\varnothing)=0$.

Într-adevăr, deoarece $m=0$, conform (1), obținem $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

$3°$ Probabilitatea unui eveniment aleator este un număr cuprins între 0 şi 1.

Într-adevăr, numărul m al cazurilor favorabile evenimentului aleator A satisface dubla inegalitate $0<m<n$, de unde $0<\frac{m}{n}<1$. Prin urmare, $0<P(A)<1$.

1. Probabilitatea oricărui eveniment A satisface dubla inegalitate $0\le P(A)\le 1$.
2. Cu cât probabilitatea este mai mare, cu atât mai des se realizează evenimentul aleator în cadrul probelor efectuate ale experimentului respectiv.

Aplicăm

1 Calculați probabilitatea evenimentului:

a) $A=$ {apariția, la aruncarea zarului, a uneia dintre fețele cu numerele 1, 2, 3, 4, 5 sau 6};

b) $B=$ {apariția numărului 9 la aruncarea zarului};

c) $C=$ {extragerea la întâmplare a bilei albe dintr-o urnă ce conține 3 bile albe şi 7 bile negre}.

2 Ordonați crescător probabilitățile obținute.

Rezolvare:

1. a) Deoarece pentru evenimentul A numărul cazurilor favorabile este $m=6$, iar numărul cazurilor posibile este $n=6$, obținem $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{6}=1$.

Aşadar, evenimentul A este un eveniment sigur şi probabilitatea lui este 1.

b) Deoarece la aruncarea zarului, pentru evenimentul B numărul cazurilor favorabile este $m=0$, iar numărul cazurilor posibile este $n=6$, obținem $P(B)=\frac{\square}{\square}=\square$.

Evenimentul B este un eveniment imposibil şi probabilitatea lui este 0.

c) Deoarece în urnă sunt în total $3+7=10$ (bile), numărul cazurilor favorabile evenimentului C este $m=3$, iar numărul de cazuri posibile este $n=10$. Atunci, $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{\square}{\square}=\square$.

Evenimentul C este un eveniment aleator, a cărui probabilitate este $\square$.

2. Ordonând crescător probabilitățile calculate, obținem $0<0{,}3<1$ sau
$$P(B)<P(C)<P(A).$$

Observație. Evenimentele egal posibile se mai numesc ***evenimente echiprobabile***. Probabilitatea fiecăruia dintre evenimentele echiprobabile este una şi aceeaşi.

De exemplu, evenimentele „Apariția stemei” şi „Apariția valorii” sunt echiprobabile la aruncarea unei monede perfecte. Dacă însă vom arunca o monedă deformată, aceste evenimente nu mai sunt echiprobabile şi probabilitatea fiecăruia poate fi calculată numai prin probe.

Putem calcula probabilitatea evenimentelor fără a efectua experimente numai dacă ştim cu certitudine că toate rezultatele posibile ale experimentului sunt echiprobabile.

Exerciții și probleme

1

1. Care este şansa ca la aruncarea unui zar să apară fața cu numărul:
   a) 6; b) 0; c) 10; d) 3?

2. Într-un set de 20 de pătrate, numărul pătratelor roşii este egal cu numărul pătratelor albastre. Care este şansa de a extrage un pătrat roşu? Dar un pătrat albastru?

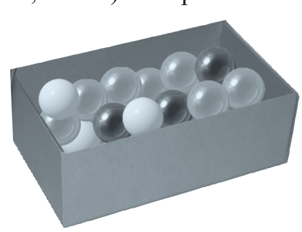
3. Calculați şansa ca la aruncarea unui zar să apară o față:
   a) cu un număr mai mic decât 2; b) cu un număr mai mare decât 2;
   c) cu un număr mai mic decât 3; d) cu un număr mai mic decât 6;
   e) cu un număr mai mare decât 10.

4. Aflați probabilitatea extragerii unei bile dintr-o urnă ce conține 15 bile de acelaşi fel.

5. Calculați probabilitatea obținerii, la aruncarea zarului, a unui număr de puncte:
   a) multiplu al lui 2; b) multiplu al lui 3; c) multiplu al lui 4; d) multiplu al lui 1.

6. Care este probabilitatea că după duminică urmează luni?

7. Într-o urnă sunt 4 bile albe, 5 bile negre şi 11 bile roşii.
   Calculați probabilitatea ca bila extrasă la întâmplare să fie:
   a) albă; b) neagră; c) roşie.



8. Care este probabilitatea ca un pește să vorbească?

9. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul mai mic decât 91, luat la întâmplare, să fie:
a) prim; b) par; c) impar.

2

10. Într-un coșuleț sunt 3 perechi de mănuşi de diferite culori. Se iau la întâmplare două mănuşi. Care este probabilitatea de a avea o pereche de mănuşi de aceeaşi culoare?

11. O urnă conține 5 bile albe, 6 bile roşii şi 7 bile verzi. Se extrage la întâmplare o bilă. Care este probabilitatea că bila extrasă nu va fi albă.

12. În clasa a VIII-a învață 14 băieți şi 17 fete. Pentru a fi de serviciu în clasă, se alege la întâmplare un elev. Care este probabilitatea ca acest elev să fie:
a) băiat; b) fată?

13. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 5 bile galbene şi 13 bile verzi. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase simultan, la întâmplare, astfel încât printre ele să se afle:
a) două bile verzi; b) două bile albe; c) două bile galbene; d) două bile de culori diferite.

14. Într-o urnă sunt 30 de bile numerotate: 1, 2, 3, ..., 30. Ordonați probabilitățile de realizare a evenimentelor:
A = {extragerea unei bile, al cărei număr împărțit la 5 dă restul 1};
B = {extragerea unei bile cu numărul un pătrat perfect}.

3

15. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul mai mic decât 501, luat la întâmplare, să aibă suma cifrelor egală cu 13.

16. Într-o urnă sunt 50 de jetoane numerotate: 1, 2, 3, ..., 50. Ordonați probabilitățile de producere a evenimentelor:
A = {extragerea unui număr prim cu 15};
B = {extragerea unui număr prim cu 25};
C = {extragerea unui număr prim cu 30}.

17. 1) Propuneți 3 experimente cu:
a) evenimente echiprobabile;
b) evenimente care nu sunt echiprobabile.
2) Calculați probabilitățile evenimentelor de la punctul a).

18. Formulați şi rezolvați câte un exercițiu asemănător cu exercițiile 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16.

§3. Elemente de statistică matematică

Cercetăm

• Elevii clasei a VIII-a au obținut la testul de matematică următoarele rezultate: două note de 3, o notă de 4, șapte note de 5, patru note de 6, cinci note de 7, trei note de 8, patru note de 9 și două note de 10. Înregistrați într-un tabel legătura dintre notele de la 1 la 10 și numărul respectiv de note obținut la test.

Rezolvare:

Tabelul alăturat conține rezultatele obținute de elevii clasei a VIII-a la testul de matematică.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	0	0	2	1	7	4	5	3	4	2

Fig. 1

În acest caz, se spune că am realizat o analiză statistică, am colectat și am înregistrat niște date.

Statistica matematică este știința care se ocupă de colectarea, înregistrarea, prelucrarea, analiza și interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen (din activitatea economică și viața socială, din fizică, biologie, meteorologie, agricultură etc.).

Definiții. ♦ Orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice se numește **populație statistică**. Numărul elementelor populației statistice se numește **volumul populației**.

- ♦ Fiecare element al populației statistice este numit **unitate statistică** (sau **individ**).
- ♦ Trăsătura comună a tuturor unităților statistice (indivizilor) este numită **caracteristică statistică**.
- ♦ Caracteristica ce poate fi măsurată (nota, vârsta, înălțimea, volumul etc.) se numește **caracteristică cantitativă (numerică)**.
- ♦ Caracteristica ce nu poate fi măsurată (culoarea ochilor, preferințele etc.) se numește **caracteristică calitativă**.
- ♦ Caracteristica ce poate lua numai valori izolate dintr-o mulțime de valori se numește **caracteristică discretă** (nota, numărul de elevi în clasă etc.).
- ♦ Caracteristica ce poate lua orice valoare dintr-un interval numeric se numește **caracteristică continuă** (înălțimea, volumul, aria etc.).

1 Identificați în exemplul de mai sus:

a) populația statistică;

b) unitățile statistice;

c) caracteristica și tipul caracteristicii.

Rezolvare:

a) Populația statistică este mulțimea elevilor din clasă.

b) Fiecare elev al clasei este o unitate statistică.

c) Caracteristica este nota obținută la test și este o caracteristică discretă.

2 Reprezentați printr-un grafic cu bare rezultatele obținute la testul de matematică din exemplul de mai sus.

Rezolvare:

Reprezentarea grafică este dată în figura 2.

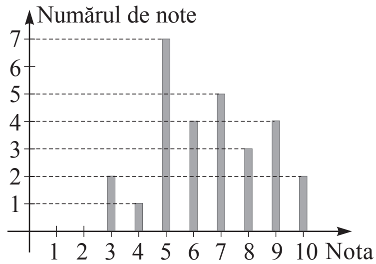


Fig. 2

Rezultatele obținute la o analiză statistică pot fi reprezentate într-un tabel (*tabelul de date statistice* (fig. 1)) sau cu ajutorul graficelor și diagramelor (*grafice cu bare*, *diagrame prin cercuri*, *diagrame prin pătrate*, *diagrame structurale* (*cerc de structură*, *pătrat*) etc.).

De exemplu, în figura 3 (cerc de structură) este reprezentată structura unei suprafețe, ca mod de folosire a terenului, dintr-o asociație agricolă.

Figura 4 (diagramă prin pătrate) ilustrează modificarea numărului de cărți dintr-o bibliotecă într-o perioadă de timp.

Producția semestrială (anuală, lunară, săptămânală, zilnică) a unei întreprinderi poate fi reprezentată sub forma unui grafic, numit ***graficul producției*** (fig. 5).

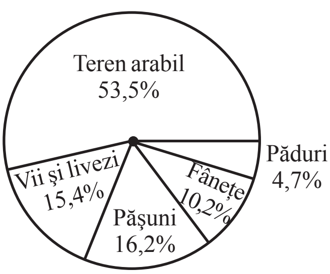


Fig. 3

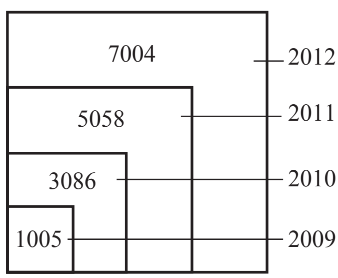


Fig. 4

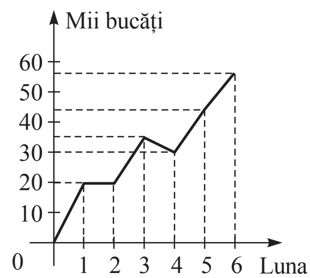


Fig. 5

Observație. O problemă importantă a trasării graficelor la o analiză statistică este păstrarea proporțiilor, prezentarea corectă a tuturor datelor.

Exerciții și probleme

1

1. S-a efectuat o analiză statistică a situației frecventării lecțiilor de către elevii claselor V–IX în luna noiembrie și s-au obținut următoarele rezultate: în clasa a V-a A – 10 absențe, în a V-a B – 8 absențe, în a VI-a A – 4 absențe, în a VI-a B – 2 absențe, în a VII-a –14 absențe, în a VIII-a – 7 absențe, în a IX-a A – 8 absențe, în a IX-a B – 3 absențe.

a) Identificați: populația statistică, unitățile statistice, caracteristica și tipul caracteristicii.

b) Reprezentați rezultatele obținute:

1) într-un tabel; 2) printr-un grafic cu bare.

2. Fie înregistrarea datelor statistice referitoare la înălțimea elevilor din clasa voastră.
a) Precizați care este: populația statistică, unitățile statistice (indivizii) şi caracteristica statistică.
b) Reprezentați prin tabelul de date statistice şi prin graficul cu bare rezultatele obținute.

□ **2** □

3. Reprezentați cu ajutorul unui cerc de structură numărul de băieți şi numărul de fete din clasa voastră.

4. Reprezentați cu ajutorul unei diagrame prin pătrate suprafața continentelor (găsiți datele în manualul de geografie).

5. Reprezentați printr-un grafic cu bare mulțimea elevilor din şcoala voastră repartizați pe clase.

6. Înregistrați temperatura aerului în cursul zilei de duminică, din oră în oră. Treceți datele obținute într-un grafic.

□ □ **3**

7. Realizați o analiză statistică a unor evenimente (experimente) sociale, economice etc. Colectați, înregistrați şi reprezentați datele printr-un tabel, grafic sau printr-o diagramă.

Exerciții și probleme recapitulative

1 □ □

1. Într-o cutie sunt bomboane cu ambalaje roşii, galbene şi verzi: jumătate sunt în ambalaj de culoare roşie, o treime – de culoare galbenă, iar celelalte – de culoare verde. Care dintre aceste culori este mai puțin probabilă la extragerea la întâmplare a unei bomboane din cutie?

2. Fie o urnă cu 12 jetoane de aceeaşi formă numerotate cu 1, 2, 3, ..., 12 şi experiența aleatoare care constă în extragerea unui jeton. Enumerați evenimentele elementare ale acestui experiment.

3. Într-un pachet sunt 7 mere verzi şi 14 mere roşii. Care este probabilitatea ca, extrăgând un măr la întâmplare, acesta să fie:
a) verde; b) roşu?

4. Fețele unui cub sunt colorate în roşu şi galben. Probabilitatea apariției feței galbene la aruncarea cubului este $\frac{1}{6}$, iar a feței roşii – $\frac{5}{6}$. Câte fețe galbene şi câte fețe roşii are cubul?

5. Fie o urnă cu 10 bile numerotate cu 1, 2, 3, ..., 10 şi experimentul aleator care constă în extragerea unei bile. Aflați probabilitatea extragerii unei bile cu un număr:
a) prim; b) par;
c) impar; d) mai mare decât 4;
e) mai mic decât 7; f) mai mare decât 11;
g) mai mic decât 11; h) care se divide cu 3.

2

6. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul, mai mic decât 151, luat la întâmplare, să fie:
a) o putere cu exponent natural mai mare decât 1; b) un pătrat perfect.

7. Într-o ladă sunt 150 de piese. Se știe că 2% din ele sunt defectate. Aflați probabilitatea că o piesă extrasă la întâmplare nu va fi defectată.

8. Dintr-un pachet de 36 de cărți de joc se extrage la întâmplare o carte. Aflați probabilitatea că s-a extras un as.

9. Aflați probabilitatea ca un număr natural mai mic decât 121, luat la întâmplare, să aibă suma cifrelor egală cu 9.

10. Într-un pachet sunt 6 mere roșii și 12 mere verzi. Ce număr minim de mere trebuie extrase din pachet pentru a fi siguri că cel puțin un măr este roșu?

11. Determinați dacă sunt echiprobabile evenimentele:
a) $A = \{$din 30 de bilete numerotate (1, 2, 3,..., 30), se extrage la întâmplare biletul cu numărul 2$\}$;
$B = \{$din 30 de bilete numerotate (1, 2, 3, ..., 30), se extrage la întâmplare biletul cu numărul 20$\}$.
b) $A = \{$câștig la loterie$\}$; $B = \{$nu câștig la loterie$\}$.

3

12. Doru câștigă la un joc dacă bila extrasă din urnă este albă. Determinați ce urnă este mai convenabil să aleagă Doru pentru ca probabilitatea câștigului să fie mai mare:
a) cu 12 bile albe din 38;
b) cu 45 bile albe din 105;
c) cu 18 bile albe și 54 roșii;
d) cu același număr de bile albe, roșii și negre.

13. Într-o urnă se află bile pe care sunt scrise numerele de trei cifre formate cu cifrele 5, 6 și 7. Aflați probabilitatea extragerii unei bile pe care să fie scris un număr care începe cu cifra 5.

14. Se aruncă o monedă de 3 ori. Care este probabilitatea ca:
a) stema să apară de două ori; b) stema să apară cel puțin o dată?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

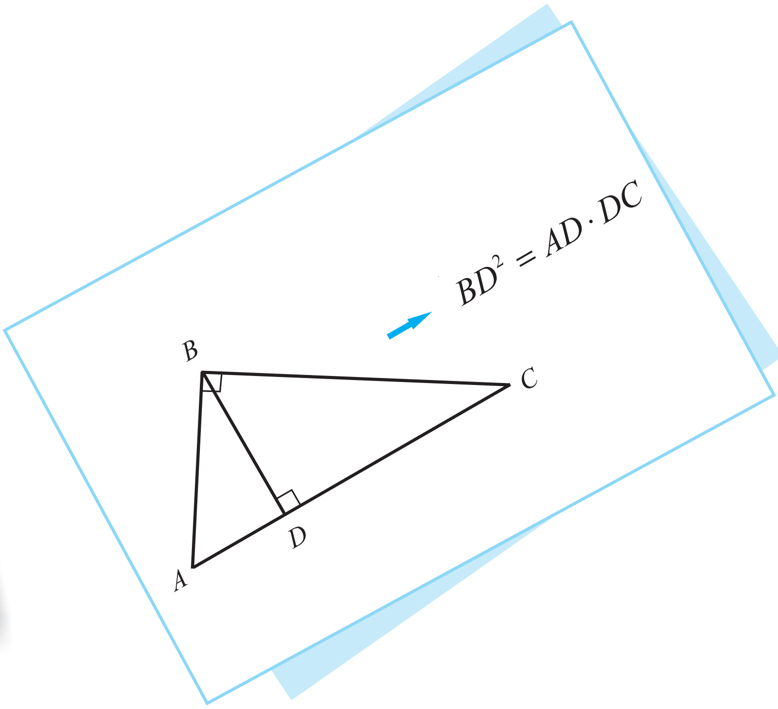
Varianta 1

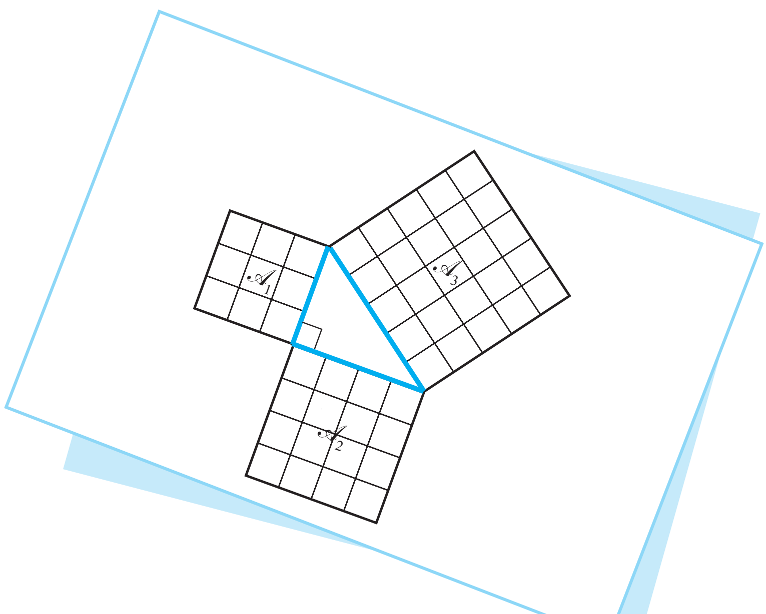
1. Într-o urnă se află 3 bile albe, 1 neagră, 2 roşii şi 1 albastră. Fie experimentul care constă în extragerea unei bile din urnă.
   a) Enumerați evenimentele elementare ale acestui experiment.
   b) Sunt aceste evenimente echiprobabile? Argumentați.
   2
2. Într-un coş sunt 3 mere roşii şi 1 măr galben. Aflați numărul cazurilor favorabile extragerii unui măr:
   a) roşu; b) galben.
   1
3. La o loterie sunt 20 de bilete câştigătoare şi 360 de bilete necâştigătoare. Laura a cumpărat un bilet de loterie. Care este probabilitatea ca biletul să fie câştigător?
   2
4. Care este probabilitatea ca după 31 decembrie să urmeze 1 ianuarie?
   1
5. Aflați probabilitatea că, deschizând la întâmplare o carte cu 150 de pagini, numărul paginii selectate va fi un pătrat perfect.
   2
6. Fețele unui cub au fost colorate în albastru şi galben. Probabilitatea apariției feței albastre la aruncarea cubului este $\frac{1}{3}$, iar a feței galbene – $\frac{2}{3}$. Câte fețe albastre şi câte fețe galbene are cubul?
   2

Varianta 2

1. Într-o cutie sunt 2 creioane verzi, 1 – roşu, 3 – albastre şi 1 – negru. Fie experimentul care constă în extragerea unui creion din cutie.
   a) Enumerați evenimentele elementare ale acestei experiențe.
   b) Sunt aceste evenimente echiprobabile? Argumentați.
2. Într-o urnă se află o bilă albă şi două bile roşii. Aflați numărul cazurilor favorabile extragerii unei bile:
   a) albe; b) roşii.
3. La o loterie sunt 200 de bilete, dintre care 15 câştigătoare. Care este probabilitatea de a nu câştiga la această loterie?
4. Care este probabilitatea ca după joi să urmeze duminică?
5. Aflați probabilitatea că, deschizând la întâmplare o carte cu 200 de pagini, numărul paginii selectate va fi un pătrat perfect.
6. Fețele unui cub au fost colorate în maro şi verde. Probabilitatea apariției feței maro la aruncarea cubului este $\frac{2}{3}$, iar a feței verzi – $\frac{1}{3}$. Câte fețe maro şi câte fețe verzi are cubul?

GEOMETRIE





1 capitolul

Recapitulare și completări

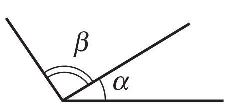
§1. Linii, unghiuri, triunghiuri, cercuri

1 Examinați schemele şi comentați.

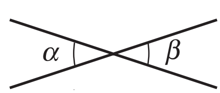
Linii
- drepte
  - necoplanare (neconcurente)
  - coplanare
    - paralele
    - concurente
- semidrepte
- linii frânte
  - închise
  - deschise
- segmente

Unghiuri
- nule: $\alpha = 0$
- ascuțite: $0 < \alpha < 90°$
- drepte: $\alpha = 90°$
- obtuze: $90° < \alpha < 180°$
- alungite (întinse): $\alpha = 180°$

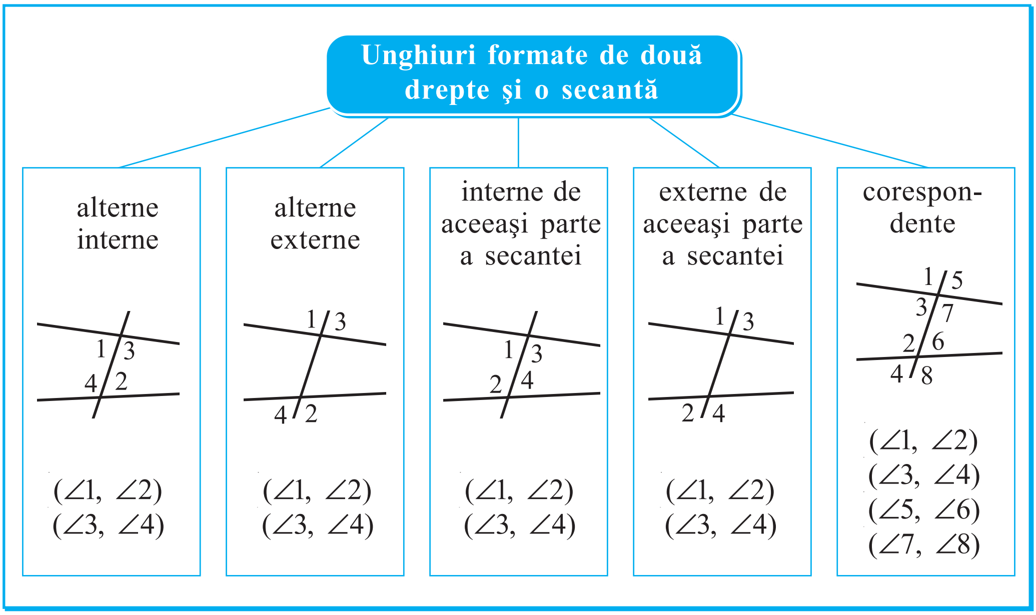
Perechi de unghiuri (α, β)
- complementare: $\alpha + \beta = 90°$
- adiacente



- suplementare: $\alpha + \beta = 180°$
- opuse la vârf

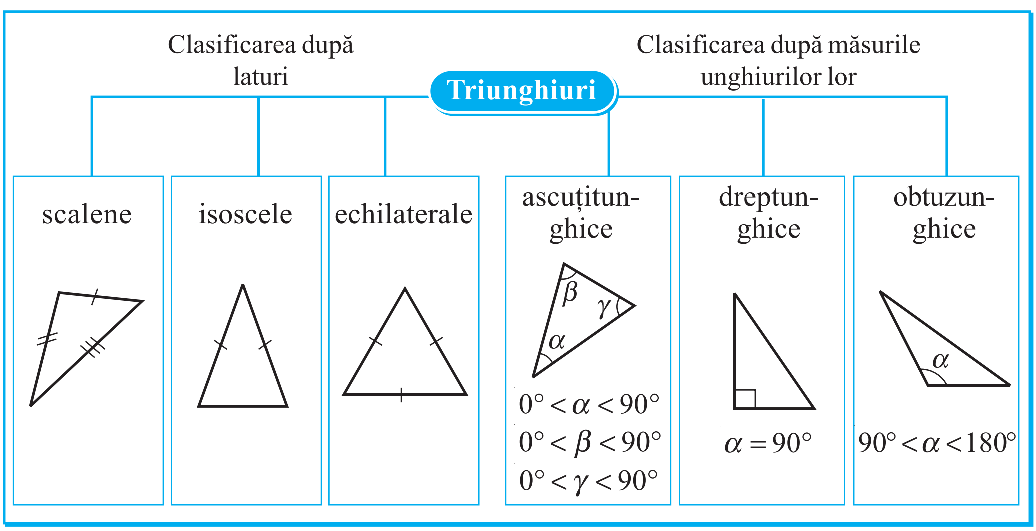


$\alpha = \beta$



• Formulați propoziții adevărate despre unghiurile formate de două drepte şi o secantă.

Exemplu. Dacă unghiurile alterne interne, formate de două drepte a şi b şi o secantă, sunt congruente, atunci $a \parallel b$.



• Formulați propoziții adevărate despre liniile importante ale triunghiului.

Exemplu. Mediana dusă la baza unui triunghi isoscel este şi o bisectoare a acestui triunghi.

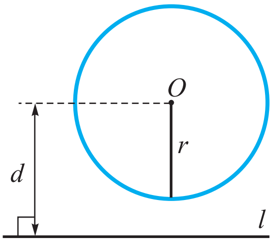
2 Pentru fiecare noțiune din prima coloană găsiți descrierea (sau definiția) acesteia în coloana a doua.

Model: ① → ④

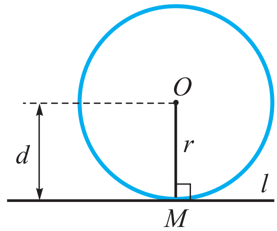
① Unghi drept
② Puncte coliniare
③ Unghi nul
④ Drepte paralele
⑤ Unghiuri complementare
⑥ Ipoteză
⑦ Unghi obtuz
⑧ Figuri congruente
⑨ Punct
⑩ Semidrepte opuse
⑪ Adevăr
⑫ Axiomă
⑬ Coplanare
⑭ Contraexemplu
⑮ Demonstrație
⑯ Drepte perpendiculare
⑰ Unghi alungit
⑱ Drepte concurente
⑲ Lungime
⑳ Linie mijlocie a triunghiului
㉑ Propoziție matematică
㉒ Semidreaptă
㉓ Fals
㉔ Teoremă
㉕ Unghiuri adiacente
㉖ Unghiuri suplementare
㉗ Unghi
㉘ Dreaptă
㉙ Segment
㉚ Bisectoarea unghiului
㉛ Reciproca teoremei
㉜ Unghi ascuțit
㉝ Concluzie

① Argumentarea adevărului unei teoreme
② Unghi cu măsura de 180°
③ Valoarea de adevăr a unei propoziții false
④ Unghi cu măsura de 90°
⑤ Propoziție matematică adevărată al cărei adevăr trebuie demonstrat
⑥ Drepte concurente care formează un unghi drept
⑦ Figură geometrică formată din două semidrepte cu originea comună
⑧ Reprezintă condițiile unei teoreme
⑨ Semidreaptă cu originea în vârful unghiului, inclusă în interiorul lui şi care formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente
⑩ Porțiune a dreptei mărginită la ambele capete
⑪ Două unghiuri cu suma măsurilor de 90°
⑫ Propoziție matematică adevărată admisă fără demonstrație
⑬ Enunț despre care se poate stabili cu certitudine că este adevărat sau fals şi care nu poate fi şi adevărat, şi fals
⑭ Exemplu care contrazice o propoziție, demonstrând astfel că ea este falsă
⑮ Trei sau mai multe puncte ale unei drepte
⑯ Figuri incluse în acelaşi plan
⑰ Unghi cu măsura de 0°
⑱ Porțiune a unei drepte nemărginite la un capăt
⑲ Drepte coplanare care nu au niciun punct comun
⑳ Unghi cu măsura cuprinsă între 90° şi 180°
㉑ Două drepte diferite care se intersectează
㉒ Două unghiuri cu suma măsurilor de 180°
㉓ Valoarea de adevăr a unei teoreme
㉔ Unghi în măsura cuprinsă între 0° şi 90°
㉕ Prin două puncte poate fi construită doar una
㉖ Parte a teoremei, care este ipoteză pentru reciproca acestei teoreme
㉗ Figuri care prin suprapunere coincid
㉘ Propoziția obținută prin schimbarea locurilor ipotezei şi concluziei unei teoreme
㉙ Două semidrepte cu originea comună care formează o dreaptă
㉚ Două unghiuri coplanare cu vârful comun şi o latură comună, situată între celelalte două laturi ale unghiurilor
㉛ Măsura segmentului
㉜ Cea mai simplă figură geometrică
㉝ Segmentul ce uneşte mijloacele a două laturi ale unui triunghi

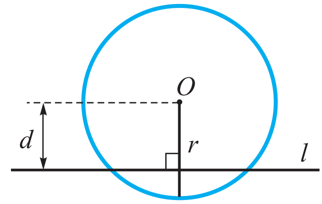
3 Examinați desenele (O este centrul cercului). Observați cum se numește dreapta l în fiecare caz.



dreaptă **exterioară** cercului



dreaptă **tangentă** la cerc;
M – punct de tangență



dreaptă **secantă** la cerc

• Câte puncte comune au un cerc și o dreaptă, dacă distanța dintre centrul cercului și dreaptă este egală cu $3\sqrt{8}$ cm, iar raza cercului este egală cu:

a) $6\sqrt{2}$ cm; b) $4\sqrt{5}$ cm; c) $2\sqrt{10}$ cm; d) $5\sqrt{3}$ cm?

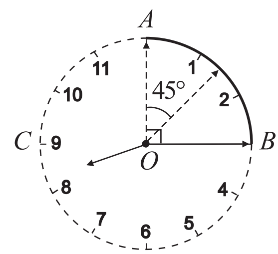
4 În cât timp minutarul unui ceas descrie:

a) un unghi de 45°;

b) o porțiune de cerc de lungime egală cu $\frac{1}{4}$ din lungimea cercului ceasului;

c) un semicerc?

Răspuns: a) 7 min și 30 s; b) 15 min; c) 30 min.



Observație. În geometrie porțiunile de cerc au denumiri și notații speciale.

Definiții. ♦ Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**.

♦ Partea cercului situată în interiorul unghiului la centru se numește **arc mic** al cercului.
Notăm: $\smile AB$, unde A și B sunt punctele de intersecție a unghiului la centru cu cercul.

♦ Partea cercului situată în exteriorul unghiului la centru se numește **arc mare** al cercului. *Notăm*: $\smile ACB$, unde C aparține cercului, dar nu aparține arcului mic.

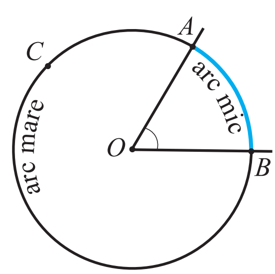
♦ Punctele A și B se numesc **capetele arcelor**. Arcele $\smile AB$ și $\smile ACB$ se numesc **arce complementare**.

♦ **Măsura unui arc mic** este măsura unghiului la centru corespunzător arcului.

$$m(\smile AB) = m(\angle AOB)$$

♦ **Măsura unui arc mare** este egală cu 360° minus măsura arcului complementar lui.

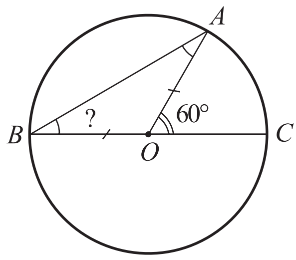
$$m(\smile ACB) = 360° - m(\angle AOB)$$



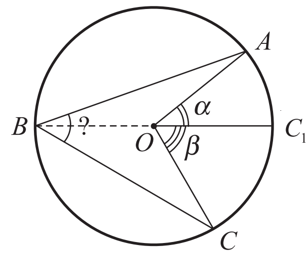
$\angle AOB$ – unghi la centru

• Aflați măsura unui arc, dacă măsura arcului complementar lui este egală cu:
a) $80°$; b) $130°$; c) $150°45'$; d) $212°17$.

5 Examinați desenele și aflați $m(\angle ABC)$.



a)



b)

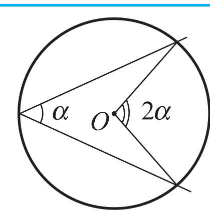
Rezolvare:
a) ΔAOB este isoscel, deci, $\angle ABO \equiv \angle BAO$. (*)
$\angle AOC$ este unghi exterior al triunghiului AOB.
Deci, $m(\angle AOC) = m(\angle ABO) + m(\angle BAO) \overset{(*)}{=} 2 \cdot m(\angle ABO)$.
Prin urmare, $m(\angle ABO) = \frac{1}{2} m(\angle AOC) = 30°$, adică $m(\angle ABC) = 30°$.

b) Similar cazului a) obținem:
$m(\angle ABC_1) = \frac{\alpha}{2}$, $m(\angle CBC_1) = \frac{\beta}{2}$, adică $m(\angle ABC) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

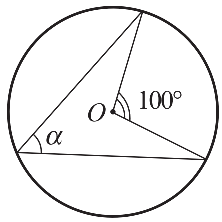
Observație. Unghiul ABC din fiecare desen al sarcinii **5** este ***unghi înscris în cerc***.

Definiție. Se numește **unghi înscris în cerc** unghiul cu vârful pe cerc și ale cărui laturi intersectează cercul.

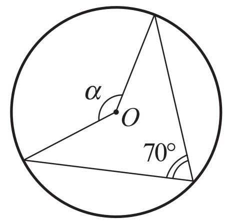
- Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile lui.



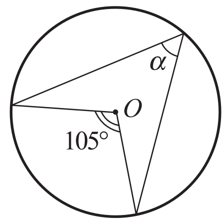
• Aflați măsura α a unghiului (O este centrul cercului):



a)



b)



c)

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Citiți:

a) $A \in b,\ M \notin c,\ N \in [AM;$

b) $a \parallel b,\ a \cap c = \{M\},\ b \cap c = \{N\};$

c) $MN > AB,\ AB \perp MN,\ A \in MN,\ B \in MN;$

d) $d \parallel l,\ AB \perp m,\ \{A, B, C\} \subset d.$

2. Construiți câte un desen pentru fiecare din cazurile a)–d) ale exercițiului **1**.

3. Completați:

a) 24 dm = ☐ cm; b) 890 mm = ☐ dm; c) 7,5 m = ☐ cm;

d) 64 900 cm = ☐ km; e) 0,065 km = ☐ dm; f) 7,05 m = ☐ mm.

4. Unul din cele 4 unghiuri formate de două drepte concurente are măsura de 44°. Aflați măsurile celorlalte unghiuri.

5. Aflați măsurile a două unghiuri:

a) opuse la vârf şi suplementare;

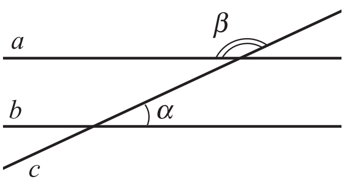
b) complementare, ştiind că măsura unui unghi este cu 10° mai mare decât a celuilalt;

c) suplementare, ştiind că măsura unui unghi este de 9 ori mai mare decât a celuilalt;

d) congruente şi adiacente, ştiind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 50°.

6. Punctele M, N, K sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă şi $MN : NK = 3:4$.

Aflați: a) $\frac{MK}{MN}$; b) $\frac{NK}{MK}$.



7. Dreptele a şi b din desen sunt paralele.

Aflați măsura unghiului necunoscut (α sau/şi β), dacă:

a) $\alpha = 25°$; b) $\beta = 120°$; c) $\beta - \alpha = 40°$.

8. Stabiliți dacă următoarele trei numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi (exprimate în aceeaşi unitate de măsură):

a) 9, 10, 16; b) 8, 12, 20; c) $\sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{11}$; d) $\sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{14}$.

9. Construiți un desen corespunzător situației:

a) Punctul M este mijlocul bazei triunghiului obtuzunghic isoscel ABC.

b) Triunghiurile ABC şi CMB sunt isoscele şi $AM \cap BC = \{D\}$.

c) Triunghiurile ABF şi GDE sunt echilaterale şi $G \in [AF],\ F \in [GE]$.

d) $\Delta BAE \equiv \Delta DEA,\ [BE] \cap AD = \{C\}$.

10. Segmentele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt mediane ale triunghiului ABC. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă:

a) $BC_1 = 9$ cm, $BA_1 = 10$ cm, $AB_1 = 12$ cm;

b) $BA_1 = 3\sqrt{5}$ cm, $AC_1 = \sqrt{125}$ cm, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ cm.

11. Câte puncte comune au un cerc şi o dreaptă, dacă raza cercului este egală cu $5\sqrt{12}$ cm, iar distanța dintre centrul cercului şi dreaptă este egală cu:

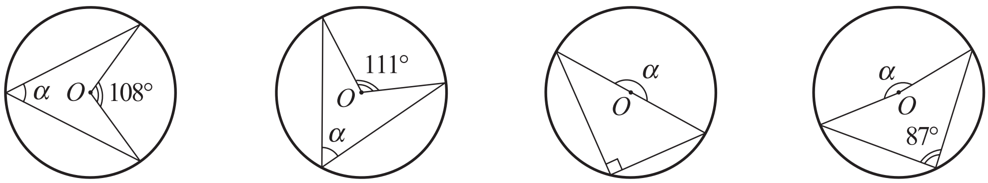
a) $6\sqrt{8}$ cm; b) $10\sqrt{3}$ cm; c) $12\sqrt{5}$ cm; d) $15\sqrt{2}$ cm?

12. Punctele A, B, C aparțin unui cerc în această ordine. Aflați:

a) $m(\smile AB)$, dacă $m(\smile ACB)=100°$; b) $m(\smile ACB)$, dacă $m(\smile AB)=140°$;

c) $m(\smile AC)$, dacă $m(\smile ABC)=25°$; d) $m(\smile BC)$, dacă $\smile AB \equiv \smile BC \equiv \smile AC$.

13. Aflați măsura α a unghiului (O este centrul cercului):



a) b) c) d)

14. Fie triunghiul ABC. Măsura unghiului A este de 2 ori mai mare decât măsura unghiului B și de 3 ori mai mică decât măsura unghiului C. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

15. Construiți un triunghi cu laturile de 6 cm, 7 cm, 8 cm.

16. Construiți un triunghi cu două laturi de 8 cm și 9 cm și unghiul dintre ele de 45°.

17. Construiți un triunghi cu o latură de 10 cm și unghiurile alăturate ei de 30° și 80°.

18. Calculați perimetrul unui triunghi:

a) isoscel cu o latură de 7 cm și alta de 15 cm;

b) echilateral cu linia mijlocie de 12 cm;

c) scalen, ale cărui laturi au lungimile numere naturale consecutive pare, cea mai lungă fiind de 28 cm.

19. Calculați:

a) $31°40'29''+46°24'37''$; b) $118°27'35''+36°27'18''$;

c) $90°-17°55'56''$; d) $142°-72°34'56''$.

20. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M\,(a, b)$ pe axa absciselor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului M_1, dacă:

a) $a=3$; $b=-\sqrt{8}$; b) $a=-0{,}4$; $b=2\sqrt{5}$.

21. Punctul M aparține bisectoarei unghiului AOB. Aflați distanța de la punctul M la semidreapta $[OA$, dacă distanța de la punctul M la semidreapta $[OB$ este egală cu:

a) $|\sqrt{7}-3|$ cm; b) $|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$ cm.

22. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi:

a) dreptunghic cu un unghi de 40°; b) isoscel cu un unghi de 110°;

c) cu un unghi de 30° și altul de 80°.

23. Medianele AM și BN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul P.
Aflați:

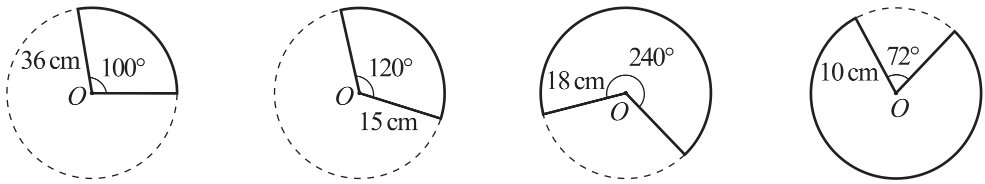
a) PM și PN, dacă $AP=24$ cm, $BP=30$ cm;

b) AP și BP, dacă $PM=\sqrt{6}$ cm, $PN=\sqrt{7}$ cm.

2

$$L_{\bigcirc} = 2\pi R$$

24. Examinați desenul și calculați lungimea arcului de cerc, știind măsura unghiului la centru corespunzător arcului și raza cercului (O este centrul cercului):



a) b) c) d)

25. Pe o dreaptă au fost marcate la distanțe egale unul de altul 20 de puncte, astfel încât primul și ultimul determină un segment de lungime x. Pe altă dreaptă au fost marcate similar (la aceeași distanță) 200 de puncte, astfel încât primul și ultimul formează un segment de lungime y. De câte ori x este mai mic decât y?

26. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu linia mijlocie de $\frac{9}{\sqrt{3}}$ cm.

27. Aflați măsurile unghiurilor formate la intersecția:
a) a două mediane ale triunghiului echilateral;
b) a trei înălțimi ale triunghiului echilateral.

28. Mediana AA_1 și bisectoarea BB_1 ale triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul M. Aflați aria triunghiului A_1BM, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 216 cm^2.

29. Dacă mărim cu 8 cm lățimea unui dreptunghi, obținem un pătrat cu perimetrul de 96 cm. Aflați perimetrul dreptunghiului.

3

30. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [BC]$. Punctele M și N aparțin exteriorului triunghiului ABC, astfel încât triunghiurile ABM și BCN sunt echilaterale. Demonstrați că $MN \parallel AC$.

31. Suma distanțelor de la vârfurile triunghiului ABC la dreapta d este egală cu 30 cm. Aflați suma distanțelor de la mijloacele laturilor triunghiului ABC la dreapta d.

32. Punctul O aparține interiorului pătratului $ABCD$.
Demonstrați că dacă $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15°$, atunci triunghiul AOB este echilateral.

§2. Elemente de logică matematică. Aplicații

Ne amintim

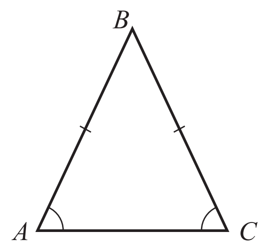
- O **propoziție** (matematică) este un enunț despre care se poate stabili cu certitudine că este adevărat sau că este fals.
- Propozițiile matematice adevărate care se admit fără demonstrații se numesc **axiome**.
- O propoziție matematică al cărei adevăr se demonstrează se numește **teoremă**.

1 Fie teorema: *Unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente.*
Pentru a pune în evidență ipoteza și concluzia acestei teoreme, o rescriem astfel:

Dacă $\underbrace{\textbf{\textit{un triunghi este isoscel}}}_{\text{Ipoteza}}$, atunci $\underbrace{\textbf{\textit{unghiurile alăturate bazei lui sunt congruente}}}_{\text{Concluzia}}$.

Examinați schema și observați legătura dintre teorema directă menționată și reciproca ei.

Teorema directă	Reciproca
Ipoteză: ΔABC, $[AB]\equiv[BC]$	*Ipoteză*: ΔABC, $\angle A\equiv\angle C$
Concluzie: $\angle A\equiv\angle C$	*Concluzie*: $[AB]\equiv[BC]$



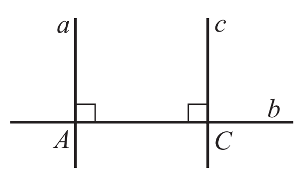
a) Determinați ipoteza și concluzia teoremei:
Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.
b) Formulați reciproca acestei teoreme și aflați valoarea ei de adevăr.

DIN ISTORIE...

„Teoremă” provine din cuvântul grecesc *theoreo*: „examinez, cercetez” și în antichitate avea sensul de show, animație. Această denumire dată unei afirmații a prins rădăcini, deoarece în acele timpuri teoremele erau demonstrate public în piețe, târguri, adesea având caracteristicile unui pariu sau ale unei dezbateri.

2 Fie teorema: *În plan, două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele între ele.*
Să demonstrăm această teoremă.

Ipoteză: $a\perp b$, $c\perp b$ *Concluzie*: $a\parallel c$

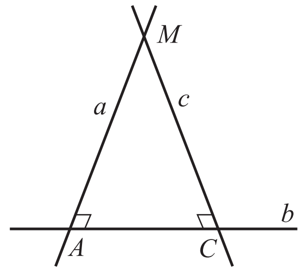


Demonstrație:

Notăm $a \cap b = \{A\}$, $c \cap b = \{C\}$. <u>Presupunem că</u> $a \nparallel c$, adică $a \cap c = \{M\}$.

Obținem că triunghiul AMC are două unghiuri de 90°: $m(\angle MAC) = m(\angle MCA) = 90°$, ceea ce este imposibil (suma unghiurilor într-un triunghi este 180°).

Această contrazicere demonstrează că presupunerea a fost greşită, deci, $a \parallel c$, c.c.t.d. ►



Comentariu. Teorema a fost demonstrată prin **metoda reducerii la absurd**. Această metodă se aplică nu doar la demonstrații matematice, dar şi în raționamente logice cotidiene.

• Demonstrați prin metoda reducerii la absurd justețea următoarelor afirmații:

a) Unghiurile alăturate bazei oricărui triunghi isoscel sunt ascuțite.

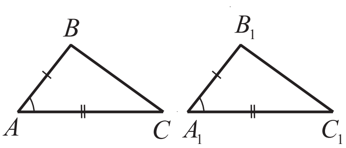
b) Crocodilul nu este pasăre.

c) Cuvântul *sport* nu este verb.

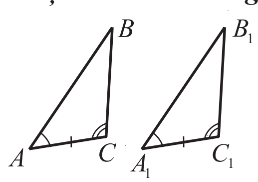
d) Dacă latura unui pătrat este mai mare decât 10 cm, atunci aria lui este mai mare decât 100 cm².

3 Ne amintim

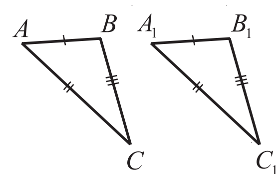
Criteriile de congruență a două triunghiuri oarecare



LUL



ULU



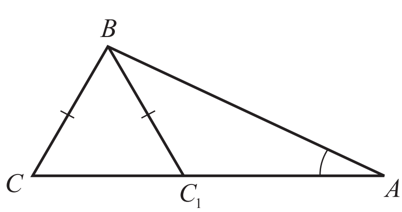
LLL

$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

Domnul X consideră că există încă un criteriu de congruență a două triunghiuri, şi anume:

> Dacă două laturi şi un unghi ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi şi un unghi ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt congruente.

Andrei Plindeidei a contrazis această afirmație prin următorul desen:



Observăm că $\angle A \equiv \angle A$, $[AB] \equiv [AB]$, $[BC] \equiv [BC_1]$, însă $\Delta ABC \not\equiv \Delta ABC_1$

Exemplul găsit este un **contraexemplu**, deoarece contrazice afirmația domnului X, demonstrând astfel că ea este falsă.

• Găsiți un contraexemplu pentru afirmația:
a) Toate numerele prime sunt pare.
b) Toate păsările pot zbura.
c) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 0$.
d) Suma a două numere iraționale este un număr irațional.

Exerciții și probleme

1

1. Selectați propozițiile matematice și stabiliți valoarea lor de adevăr:
a) Există numere prime pare.
b) Iarna cerne norii de zăpadă.
c) Uneori primăvara plouă.
d) Există numere compuse impare.
e) Cine arvoneşte plăteşte.
f) Nu fumați!

2. Aflați valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dacă $a \perp b$ şi $a \perp c$, atunci $b \perp c$.
b) Ultima cifra a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 42$ este 0.
c) Numărul 123456 se divide cu 4.
d) Alfabetul limbii române conține exact 5 vocale.
e) Orice trei puncte diferite ale unui cerc sunt necoliniare.

3. Formulați negația propoziției:
a) $8 \cdot 8 = 64$.
b) $3\sqrt{5} > 4\sqrt{3}$.
c) Numărul 5 este soluție a ecuației $2x^2 - 3x - 35 = 0$.
d) Numărul 7 nu este soluție a inecuației $x - 1 > 5$.
e) Orice enunț este o propoziție matematică.

4. Aflați valoarea de adevăr:
a) a propozițiilor din exemplul precedent;
b) a negațiilor propozițiilor din exemplul precedent.

5. Determinați ipoteza şi concluzia teoremei:
a) Dacă numărul natural se divide cu 4, atunci el se divide cu 2.
b) Dacă $a > b$, atunci $a + c > b + c$, pentru orice numere reale a, b, c.
c) Dacă ultima cifră a numărului natural este 0, atunci acest număr se divide cu 5.
d) Dacă un triunghi este echilateral, atunci unghiurile lui sunt congruente.
e) Dacă $[AC]$ este cea mai lungă latură a triunghiului ABC, atunci unghiul B are măsura cea mai mare.

6. Formulați reciprocele teoremelor din exercițiul precedent şi aflați valoarea lor de adevăr.

7. Formulați un contraexemplu pentru afirmația:
a) Produsul oricăror două numere raționale nu este număr întreg.
b) Toate soluțiile naturale ale inecuației $|x| < 4$ sunt numere pare.
c) Pentru orice numere reale a şi b, dacă $a > b$, atunci $a^2 > b^2$.
d) Orice număr de forma $2^n - 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este număr prim.

8. Demonstrați prin metoda reducerii la absurd următoarele afirmații adevărate:
a) O dreaptă și un cerc pot avea cel mult două puncte comune.
b) Dacă azi este miercuri, atunci mâine va fi joi.
c) Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile acestui unghi.

2

9. Determinați ipoteza și concluzia teoremei:
a) Mediana cuprinsă între laturile congruente ale unui triunghi isoscel este și o bisectoare a acestui triunghi.
b) Unghiurile corespondente formate de două drepte paralele cu o secantă sunt congruente.
c) Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului.
d) Diagonalele unui paralelogram se intersectează în mijlocul lor.
e) Punctele mediatoarei unui segment sunt egal depărtate de extremitățile acestuia.

10. Fie d distanța de la centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$ la dreapta l. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dreapta l este exterioară cercului, dacă și numai dacă $d > r$.
b) Dacă $d < r$, atunci dreapta l este secantă la cerc.
c) Dacă $d = r$, atunci dreapta l este tangentă la cerc.

11. Fie propozițiile:
A: *Numărul* 24 *se divide cu* 8. B: *Numărul* 24 *se divide cu* 9.
Aflați valoarea de adevăr a propoziției compuse
a) A sau B. b) A și B. c) $\overline{B}$ și A.
d) $\overline{A}$ sau $\overline{B}$. e) $\overline{A}$ și B.

Dacă X este o propoziție, atunci $\overline{X}$ este negația ei.

12. Fie enunțurile:
A: Numărul natural a este compus. B: Numărul natural a este par.
Aflați valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dacă A, atunci B. b) Dacă B, atunci A.
c) Dacă $\overline{A}$, atunci $\overline{B}$. d) Dacă $\overline{B}$, atunci $\overline{A}$.

13. Arătați prin contraexemple că următoarea afirmație este falsă:
a) $\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$, pentru orice numere reale a, b, unde $b \neq 0$.
b) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$, pentru orice numere reale a, b, unde $b \neq 0$.

14. Fie enunțurile:
A: *Domnul X este pianist.* B: *Domnul X este muzicant.*
Aflați valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dacă A, atunci B. b) Dacă B, atunci A.
c) Dacă $\overline{A}$, atunci $\overline{B}$. d) Dacă $\overline{B}$, atunci $\overline{A}$.

3

15. Se ştie că propoziția „Dacă A, atunci B” este adevărată. Care este valoarea de adevăr a propoziției „Dacă $\overline{B}$, atunci $\overline{A}$”? Justificați prin exemple.

Matematică distractivă

16. Pe o pagină sunt scrise 10 propoziții:
Această pagină conține exact o propoziție falsă.
Această pagină conține exact două propoziții false.
Această pagină conține exact trei propoziții false.
. . .
Această pagină conține exact zece propoziții false.
Care dintre aceste propoziții este adevărată?

17. Adi spune întotdeauna adevărul, iar Minciu spune întotdeauna minciuni. La ce întrebare ei vor da acelaşi răspuns?

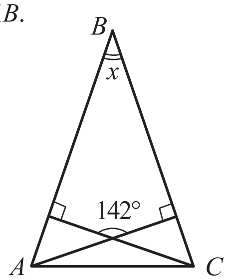
Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. Realizați un desen corespunzător situației: **2**
$AB \cap CD = \{M\}$,
$EF \cap CD = \{N\}$,
$AB \parallel EF$, $MN \perp AB$.

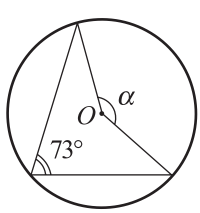
2. Examinați desenul ($[AB] \equiv [BC]$) şi calculați x: **2**



3. Scrieți unghiurile triunghiului ABC în ordinea descrescătoare a măsurilor lor, dacă: **2**
$$\frac{AC}{AB} < 0{,}7, \ \frac{BC}{AB} > 1{,}1.$$

4. Aflați lungimea arcului de cerc cu măsura de 40° ştiind că raza cercului este egală cu 27 cm. **2**

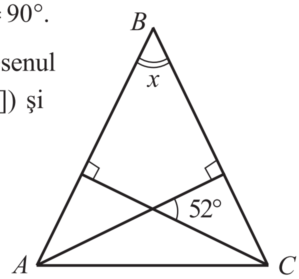
5. Calculați valoarea α a unghiului (O este centrul cercului). **2**



Varianta 2

1. Realizați un desen corespunzător situației:
$a \cap b = \{A\}$, $a \cap c = \{B\}$,
$b \cap c = \{C\}$,
$m(\angle BAC) = 90°$.

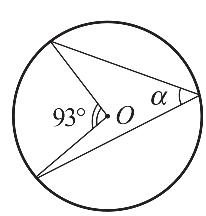
2. Examinați desenul ($[AB] \equiv [BC]$) şi calculați x:



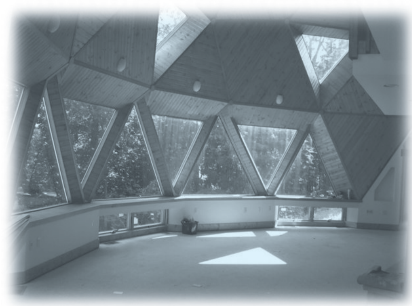
3. Scrieți laturile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a lungimilor lor, dacă:
$$\frac{m(\angle B)}{m(\angle A)} < 0{,}85.$$

4. Aflați lungimea arcului de cerc cu măsura de 60° ştiind că raza cercului este egală cu 33 cm.

5. Calculați valoarea α a unghiului (O este centrul cercului).

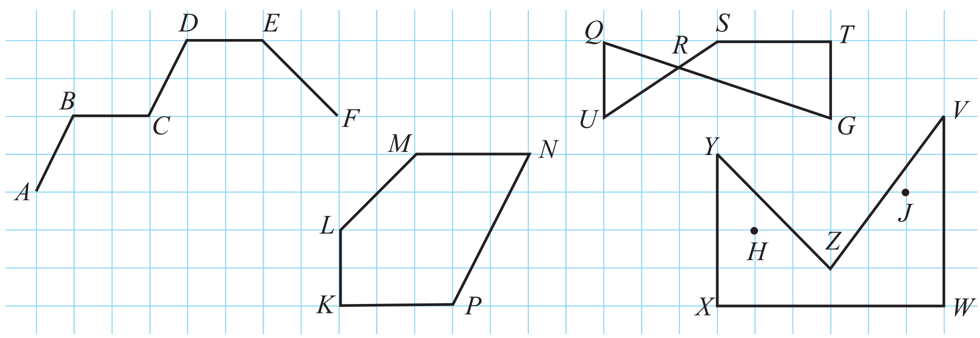


2 capitolul — Patrulatere



§1. Poligoane convexe

1 Examinați liniile poligonale din desen.



Completați:

a) *ABCDEF* este ______. b) ______ sunt linii frânte închise.

c) Liniile poligonale ______ sunt poligoane, deoarece...

d) Poligoanele ______ se numesc ______, deoarece au câte 5 laturi.

e) Poligonul ______ are diagonalele ______.

Definiții. ♦ Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ puncte distincte, fiecare trei consecutive fiind necoliniare. Reuniunea segmentelor $[A_1, A_2], [A_2, A_3], ..., [A_{n-1}, A_n]$ se numeşte **linie poligonală** (sau **linie frântă**). Punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ se numesc **vârfurile liniei poligonale**.

♦ O linie poligonală închisă ale cărei laturi nu au alte puncte comune decât vârfurile liniei se numeşte **poligon**.

♦ Porțiunea planului mărginită de laturile poligonului se numeşte **interiorul poligonului**. Cealaltă porțiune a planului se numeşte **exteriorul poligonului**.

• Găsiți poligonul din desenul de mai sus în care orice două puncte din interiorul poligonului determină un segment care este inclus în interiorul acestuia.

Definiții. ♦ Poligonul se numeşte **convex** dacă orice două puncte diferite din interiorul poligonului determină un segment inclus în interiorul poligonului.

♦ Poligonul se numeşte **concav** dacă există două puncte diferite din interiorul poligonului care determină un segment ce nu este inclus în interiorul poligonului.

♦ Se numeşte **diagonală** a poligonului convex segmentul ce uneşte două vârfuri nealăturate unei laturi.

♦ Poligoanele cu 4 laturi (respectiv 5 laturi, 6 laturi) se numesc **patrulatere** (respectiv, **pentagoane**, **hexagoane**).

Poligonul *KLMNP* este convex, iar poligonul *XYZVW* este concav, deoarece $[HJ]$ nu este inclus în interiorul poligonului.

• Pentru care din poligoanele *KLMNP* şi *XYZVW* dreptele-suport ale laturilor poligonului nu intersectează interiorul lui? Trageți concluzia.

2 Luând în considerație că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°, reproduceți şi completați tabelul.

Denumirea poligonului	*Numărul de laturi*	*Numărul de diagonale ce pornesc dintr-un vârf*	*Suma măsurilor unghiurilor poligonului*
Patrulater convex	4		
Pentagon convex			
Hexagon convex			

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este egală cu $180° \cdot (n-2)$.

Exerciții și probleme

1

1. Desenați şi notați o linie poligonală:
a) deschisă, cu 5 laturi care nu au alte puncte comune decât vârfurile liniei;
b) deschisă, cu 6 laturi care se intersectează în puncte diferite de vârfurile liniei;
c) închisă, cu 5 laturi care nu au alte puncte comune decât vârfurile liniei;
d) închisă, cu 7 laturi care se intersectează în puncte diferite de vârfurile liniei.

2. Desenați un poligon:
a) convex cu 5 laturi; b) concav cu 6 laturi; c) convex cu 7 laturi; d) concav cu 8 laturi.

3. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon cu:
a) 5 laturi; b) 6 laturi; c) 7 laturi; d) 10 laturi?

4. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu:
a) 6 laturi; b) 7 laturi; c) 8 laturi; d) 10 laturi.

5. Calculați perimetrul unui poligon convex cu laturile de:
a) $7\frac{1}{3}$ cm; 6,(2) cm; 6 cm; 7,(8) cm;
b) $8\sqrt{3}$ cm; $\sqrt{300}$ cm; $\sqrt{192}$ cm; $\sqrt{243}$ cm.

6. Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale unui patrulater convex cu două laturi paralele, dacă două unghiuri opuse ale patrulaterului au măsurile:
a) 60° şi 100°; b) 110° şi 90°.

7. Aflați măsurile unghiurilor unui poligon convex cu n laturi congruente, dacă:
a) $n=4$; b) $n=5$; c) $n=6$; d) $n=10$.

8. Unghiurile A şi B ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt suplementare. Care este poziția relativă a dreptelor AD şi BC?

9. Perimetrul unui patrulater convex este de 50 cm. Calculați lungimile laturilor patrulaterului, ştiind că lungimile lor, exprimate în centimetri, reprezintă numere naturale consecutive.

2

10. Există oare un poligon convex cu laturile de:
a) 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 9 cm; b) 2 cm, 4 cm, 10 cm, 4 cm;
c) 0,6 cm; 0,1 cm; $\frac{1}{3}$ cm; $\frac{1}{9}$ cm?

11. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă ele sunt direct proporționale cu numerele:
a) 2, 3, 4, 6; b) 2, 3, 6, 7; c) 6, 8, 10, 12.

12. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă ele sunt invers proporționale cu numerele:
a) 2, 3, 6, 9; b) 1, 2, 3, 6.

3

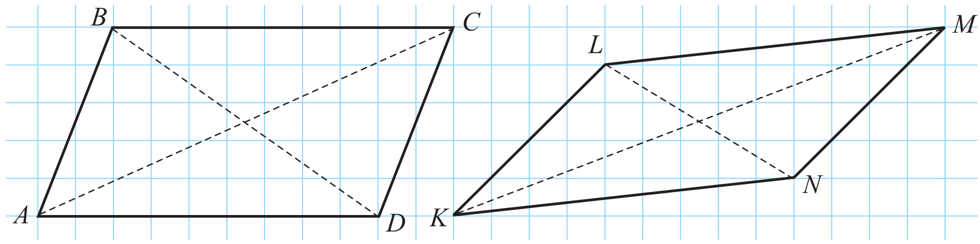
13. Câte diagonale are un poligon convex cu:
a) 5 laturi; b) 6 laturi; c) 7 laturi; d) 10 laturi?

14. Demonstrați că un poligon convex cu n laturi are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale.

15. **Unghi exterior** al poligonului convex se numeşte unghiul adiacent acestui unghi al poligonului. Demonstrați că măsura unghiului exterior al unui patrulater convex este egală cu suma măsurilor unghiurilor patrulaterului neadiacente lui minus 180°.

§2. Paralelograme

1 Examinați desenul.



Utilizând instrumentele necesare, stabiliți:

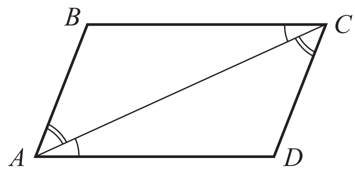
a) ce relații există între laturile opuse ale fiecărui patrulater. Dar între unghiurile opuse? Dar între două unghiuri consecutive?

b) proprietățile punctului de intersecție a diagonalelor fiecărui patrulater.

Definiție. Patrulaterul cu două perechi de laturi paralele se numește **paralelogram**.

Patrulaterele *ABCD* şi *KLMN* sunt paralelograme.

Teorema 1. Laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.



Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: $ABCD$ – paralelogram, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Concluzie: $[AB] \equiv [CD], [AD] \equiv [BC]$.

Demonstrație:

① $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (Criteriul ULU: $[AC]$ – latură comună, $\angle BAC \equiv \angle DCA$, $\angle ACB \equiv \angle CAD$ – perechi de unghiuri alterne interne).

② Din ① rezultă că $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$, c.c.t.d. ►

• Completați astfel încât să obțineți reciproca teoremei 1, care, de asemenea, este adevărată: *Dacă laturile opuse ale unui patrulater convex* ________________, *atunci patrulaterul este* ________________.

• Similar demonstrației teoremei 1, arătați justețea următoarelor propoziții:

Teorema 2. Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Teorema 3. Două unghiuri consecutive ale unui paralelogram sunt suplementare.

Teorema 4. Punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este mijlocul diagonalelor lui.

Reciprocele teoremelor 2–4, de asemenea, sunt adevărate. Atât definiția paralelogramului, cât şi fiecare dintre reciprocele teoremelor 1–4 ne permit să stabilim în ce caz patrulaterul este paralelogram.

Criteriile paralelogramului

Un patrulater convex este paralelogram dacă respectă cel puțin una din condițiile:
1. patrulaterul are două perechi de laturi paralele;
2. patrulaterul are o pereche de laturi paralele şi congruente;
3. patrulaterul are două perechi de laturi opuse congruente;
4. patrulaterul are două perechi de unghiuri opuse congruente;
5. patrulaterul are perechile de unghiuri consecutive suplementare;
6. diagonalele patrulaterului au acelaşi mijloc.

2 Completați cu unul din cuvintele *pătrat*, *dreptunghi*, *romb*, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Paralelogramul cu un unghi drept este ______.

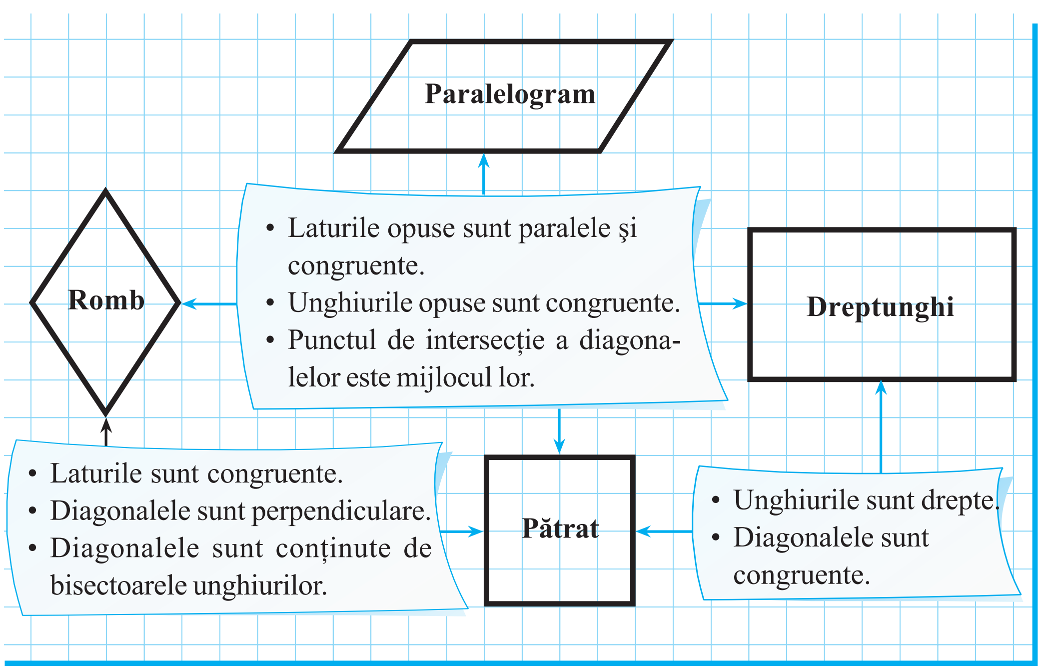
b) Dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente este ______.

c) Paralelogramul cu două laturi consecutive congruente este ______.

d) ______ are toate unghiurile drepte.

e) ______ are laturile congruente.

• Examinați schema şi formulați teoreme.

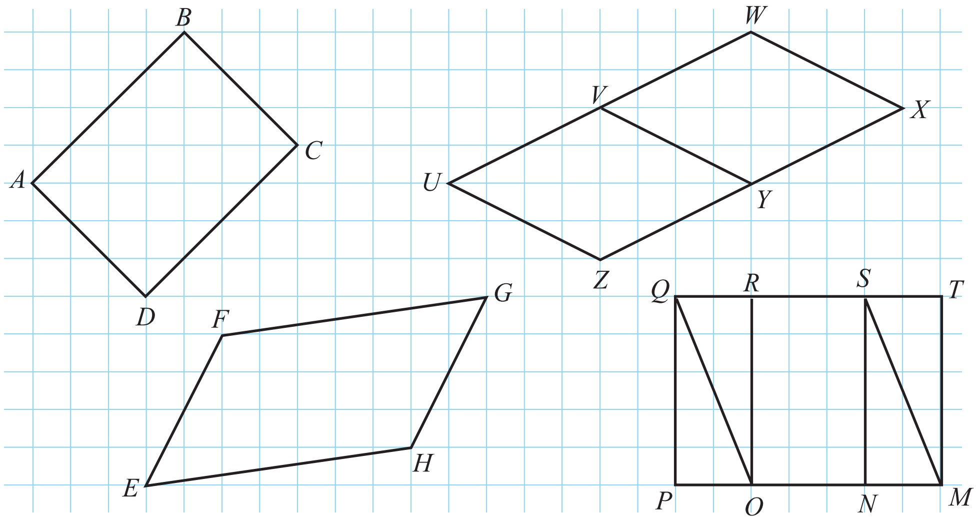


Exerciții și probleme

1

1. Examinați desenul şi selectați:

a) pătratele; b) dreptunghiurile; c) paralelogramele; d) romburile.



2. Aflați perimetrul unui paralelogram cu laturile de:

a) 3,5 cm şi 4,5 cm; b) $9\sqrt{5}$ cm şi $\sqrt{180}$ cm.

3. Aflați perimetrul rombului cu latura de: a) 8,2 cm; b) 7,(6) cm.

4. Realizați un desen pentru care este adevărată propoziția:

a) $[AB]$ şi $[CD]$ sunt diagonalele unui paralelogram.

b) Lungimea dreptunghiului $ABCD$ este de 1,5 ori mai mare decât lățimea lui.

c) $ABCD$ este dreptunghi, iar $AEFD$ este paralelogram.

d) Patrulaterul $ABCD$ are diagonalele congruente şi nu este paralelogram.

5. *Adevărat* sau *Fals*?

a) Lungimea laturii unui romb reprezintă 25% din perimetrul rombului.

b) Rombul cu diagonalele congruente este pătrat.

c) Paralelogramul cu laturile congruente este pătrat.

d) Dacă diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare, atunci acest patrulater este romb.

6. Un unghi al paralelogramului are măsura de 35°. Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului.

7. Un unghi al paralelogramului are măsura de 5 ori mai mare decât a altui unghi al paralelogramului. Aflați măsurile unghiurilor paralelogramului.

8. Un unghi al rombului are măsura cu 20° mai mică decât a altui unghi al rombului. Aflați măsurile unghiurilor rombului.

☐ **2** ☐

9. $ABCD$ este un dreptunghi cu diagonala de 10 cm. Aflați raza cercului care conține punctele A, B și C.

10. Diagonalele rombului $ABCD$ cu latura de 12 cm se intersectează în punctul O. Aflați raza cercului care conține punctele A, B, O.

11. Perimetrul unui patrulater este de 1 m. Aflați lungimile laturilor patrulaterului, știind că, exprimate în centimetri, ele reprezintă numere pare consecutive.

12. Dacă mărim cu 11 cm lățimea unui dreptunghi, obținem un pătrat cu perimetrul de 112 cm. Care este perimetrul dreptunghiului?

13. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 50 cm. Aflați distanța dintre dreptele AD și BC, dacă $m(\angle A) = 30°$ și $BC = 16$ cm.

14. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 70 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, știind că, dacă lungimea lui se mărește cu 10 cm, se obține dublul lățimii dreptunghiului.

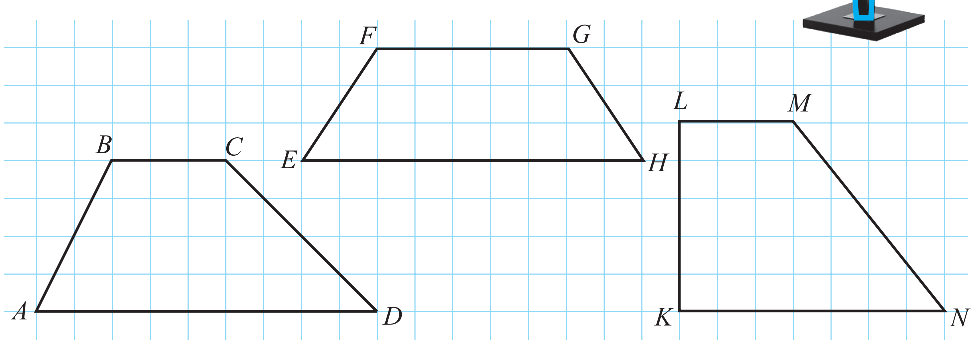
☐ ☐ **3**

15. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în B, dacă $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm.

16. Aflați coordonatele celui de-al patrulea vârf al paralelogramului $ABCD$, dacă:
a) $A(0, 0)$, $B(1, 3)$, $C(7, 1)$;
b) $A(-7, -3)$, $B(5, 2)$, $C(17, -3)$;
c) $A(-5, -3)$, $B(5, 4)$, $C(9, 3)$.

§3. Trapezul

1 Examinați desenul.
a) Ce relații există între laturile fiecărui patrulater?
Dar între unghiurile lui?
b) Există o relație comună pentru toate cele trei patrulatere?



Definiţii. ♦ Patrulaterul cu două laturi paralele şi celelalte două laturi neparalele se numeşte **trapez**. Laturile paralele se numesc **baze**, iar celelalte două se numesc **laturi laterale**.

- ♦ Trapezul cu laturile neparalele congruente se numeşte **trapez isoscel**.
- ♦ Trapezul cu una din laturile neparalele perpendiculară pe baze se numeşte **trapez dreptunghic**.
- ♦ Segmentul cu extremităţile pe dreptele-suport ale bazelor trapezului şi perpendicular pe ele se numeşte **înălţime a trapezului**.

• Cercetaţi patrulaterele de mai sus şi completaţi:

a) $ABCD$ este ______ .

b) Patrulaterul ______ este un trapez dreptunghic.

c) Patrulaterul ______ este un trapez isoscel.

d) Diagonalele trapezului ______ sunt congruente.

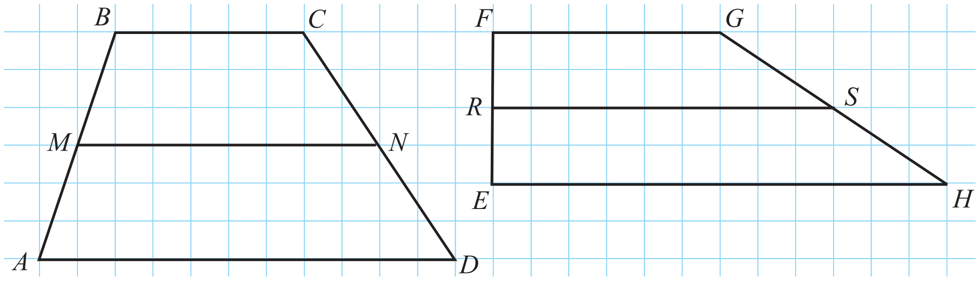
e) Trapezul ______ are două perechi de unghiuri congruente.

Teorema 1. Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

Teorema 2. Unghiurile alăturate fiecărei baze a trapezului isoscel sunt congruente.

• Demonstraţi teoremele 1 şi 2.

2 Examinaţi desenul.



• Completaţi:

a) Punctele M, N, R, S sunt mijloacele segmentelor ______ respectiv.

b) Segmentele $[BC]$, $[MN]$ şi $[AD]$ sunt ______ .

c) Segmentele $[EH]$, $[FG]$ şi $[RS]$ sunt ______ .

• Calculaţi $\dfrac{AD+BC}{MN}$ şi $\dfrac{EH+FG}{RS}$.

Definiţie. Segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte **linia mijlocie a trapezului**.

$[MN]$ şi $[RS]$ sunt linii mijlocii ale trapezelor $ABCD$ şi, respectiv, $EFGH$.

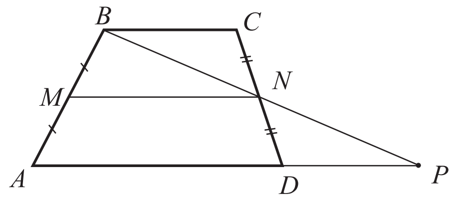
Teorema 3. Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele şi are lungimea egală cu semisuma lor.

Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: $ABCD$ – trapez, $AD \parallel BC$, M şi N – mijloacele laturilor $[AB]$ şi, respectiv, $[CD]$.

Concluzie: 1) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$;

2) $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.



Demonstrație:

① Fie P punctul de intersecție a dreptelor BN şi AD.

② $\Delta BCN \equiv \Delta PDN$ (Criteriul ULU: $[CN] \equiv [DN]$,

$\angle BNC \equiv \angle PND$ – unghiuri opuse la vârf;

$\angle BCN \equiv \angle PDN$ – unghiuri alterne interne).

Prin urmare, $[BC] \equiv [PD]$, N – mijlocul segmentului BP.

③ $[MN]$ – linie mijlocie a triunghiului ABP.

Prin urmare, $MN \parallel AP$ (∗), $MN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Conform (∗), $MN \parallel AD$. Aşa cum $AD \parallel BC$, rezultă că $MN \parallel BC$, c.c.t.d. ►

Exerciții şi probleme

1

1. Realizați un desen pentru care este adevărată propoziția:
   a) Trapezul $ABCD$ are bazele AB şi CD.
   b) Unghiul C al trapezului $ABCD$ este drept.
   c) Trapezul dreptunghic $ABCD$ are o bază de două ori mai mică decât cealaltă bază.
   d) Diagonalele trapezului $ABCD$ sunt perpendiculare.
   e) Trapezul isoscel $ABCD$ are latura laterală congruentă cu baza mică.

2. Aflați măsurile unghiurilor trapezului dreptunghic $ABCD$ cu baza mare $[AD]$, dacă:
   a) $m(\angle A) + m(\angle D) = 160°$; b) $m(\angle B) + m(\angle D) = 130°$.

3. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$, dacă:
   a) $m(\angle A) + m(\angle D) = 160°$; b) $m(\angle B) + m(\angle C) = 220°$.

4. Calculați lungimea liniei mijlocii a unui trapez cu bazele de:
   a) 8 cm şi 4 cm; b) $2\sqrt{7}$ cm şi $6\sqrt{7}$ cm; c) 6,(3) cm şi 9,(3) cm.

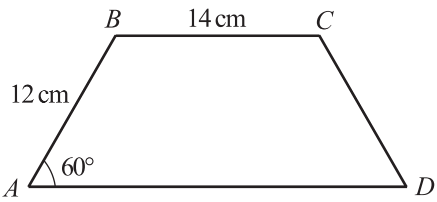
5. $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați:

a) AD, dacă $MN = 10$ cm și $BC = 6$ cm;

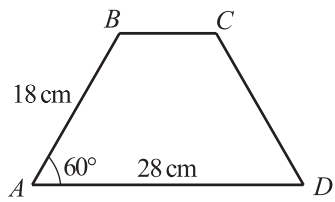
b) BC, dacă $MN = 12,5$ cm și $AD = 15$ cm.

6. Aflați lungimile laturilor trapezului isoscel cu perimetrul de 100 cm, știind că latura laterală este congruentă cu baza mică și este de două ori mai scurtă decât baza mare.

7. Utilizând datele din desen, aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$.



a)



b)

8. $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați:

a) perimetrul trapezului, dacă $AB = 8$ cm, $CD = 9$ cm, $MN = 12$ cm;

b) MN, dacă $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $DC = 4\sqrt{5}$ cm și perimetrul trapezului este de $21\sqrt{5}$ cm.

9. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați $AC + BD$, dacă $BD = 10$ cm.

2

10. Diagonala unui trapez împarte linia mijlocie a acestuia în două segmente. Raportul lungimilor acestor segmente este de $\frac{2}{3}$. Aflați lungimile bazelor trapezelor, dacă lungimea liniei mijlocii este de 15 cm.

11. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Calculați perimetrul trapezului, dacă $AD = 18$ cm, $BC = 11$ cm și $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD.

12. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați măsurile unghiurilor trapezului, dacă $AD = 2BC$ și $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD.

3

13. Punctul E aparține bazei mari $[AB]$ a trapezului $ABCD$, astfel încât $[AE] \equiv [DC]$. Demonstrați că punctul de intersecție a segmentelor AC și DE este mijlocul fiecăruia dintre segmente.

14. Fie $[MN]$ linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați MN, dacă: $MN + AD = 31$ cm, $MN + BC = 25$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative

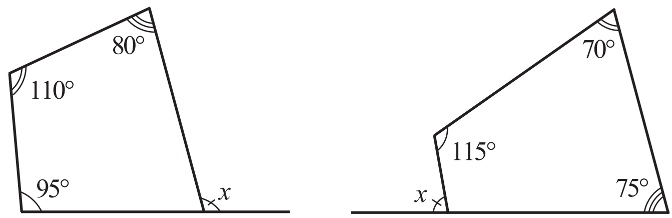
1

1. Desenați o linie:
a) curbă deschisă; b) frântă închisă;
c) poligonală închisă, cu 6 laturi; d) frântă deschisă, cu 5 laturi.

2. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon convex cu:
a) 8 laturi; b) 9 laturi; c) 12 laturi; d) 18 laturi?

3. Câte laturi are poligonul convex, dacă suma măsurilor unghiurilor lui este egală cu:
a) 1260°; b) 1800°; c) 3240°; d) 2700°?

4. Calculați măsura unghiului notată cu x.



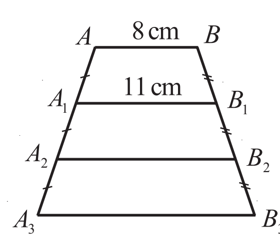
a) b)

5. Construiți:
a) un paralelogram cu diagonalele de 6 cm şi 8 cm şi unghiul format de ele de 40°;
b) un pătrat cu diagonala de 7 cm;
c) un romb cu diagonalele de 8 cm şi 10 cm;
d) un dreptunghi cu o latură de 5 cm, care formează cu diagonala un unghi de 50°.

6. Construiți:
a) un pătrat cu perimetrul de 20 cm;
b) un romb cu latura de 6 cm şi un unghi de 60°;
c) un trapez dreptunghic cu înălțimea de 5 cm şi bazele de 4 cm şi 6 cm;
d) un trapez isoscel cu înălțimea de 5 cm şi bazele de 3 cm şi 7 cm.

7. Vârfurile patrulaterului $MNKP$ sunt mijloacele laturilor pătratului $ABCD$, iar vârfurile patrulaterului $VXYZ$ – mijloacele laturilor patrulaterului $MNKP$. Calculați:
a) XY, dacă $AB = 8\sqrt{2}$ cm;
b) aria pătratului $ABCD$, dacă $XY = 2\sqrt{5}$ cm.

8. Utilizând datele din desen, aflați lungimile segmentelor A_2B_2 şi A_3B_3, dacă $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.



2

9. Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în centrul unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele:
a) punctelor A şi B, dacă $C(4, 6)$, $D(3, –2)$;
b) punctelor C şi D, dacă $A(1, 1)$, $B(5, –1)$.

10. Fie $ABCD$ un paralelogram, $M \in [AD]$, astfel încât $BM \perp AD$. Aflați aria paralelogramului, dacă $BM = 8$ cm, $AD = 12$ cm.

Indicație. Fie $N \in [AD$, astfel încât $CN \perp AD$. Arătați că $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$.

3

11. Aflați aria unui romb cu diagonalele de 10 cm şi 12 cm.

12. Calculați aria unui trapez isoscel cu:
a) înălțimea de 5 cm, bazele de 6 cm şi 14 cm;
b) înălțimea de 8 cm, bazele de 5 cm şi 7 cm.

13. Calculați suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui:
a) patrulater convex;
b) pentagon convex;
c) hexagon convex.

14. Ce tip de patrulater determină bisectoarele unui dreptunghi oarecare?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon convex, dacă suma unghiurilor lui este egală cu 2700°? **2**

2. Aflați măsurile unghiurilor unui romb, dacă o diagonală formează cu o latură un unghi de 20°. **2**

3. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în centrul unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, dacă vârful D are coordonatele $(-3, 2)$ şi laturile dreptunghiului sunt paralele cu axele de coordonate. **3**

4. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu 7 laturi. **3**

Varianta 2

1. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon convex, dacă suma unghiurilor lui este egală cu 1980°?

2. Aflați măsurile unghiurilor unui romb, dacă o diagonală formează cu o latură un unghi de 70°.

3. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în centrul unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, dacă vârful D are coordonatele $(1, -5)$ şi laturile dreptunghiului sunt paralele cu axele de coordonate.

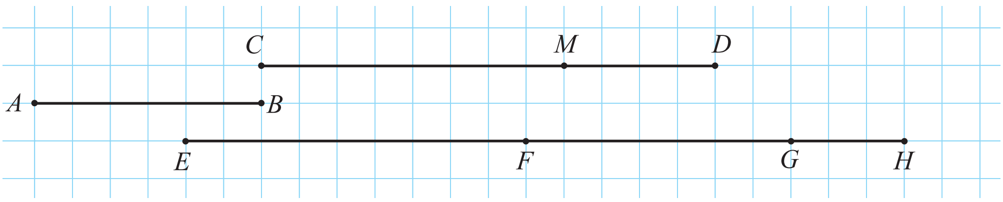
4. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu 8 laturi.

capitolul 3 Asemănarea triunghiurilor

§1. Teorema lui Thales

1.1. Segmente proporționale

1 Examinați desenul şi completați:



a) $\frac{AB}{CD} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = 0{,}5$, $\frac{CD}{EG} = \square$, $\frac{EF}{CD} = \square$, $\frac{GH}{MD} = \square$;

b) $\frac{AB}{CM} = \frac{\square}{CD} = \frac{GH}{\square} = \frac{\square}{EG}$.

- **Raportul a două segmente** este raportul lungimilor lor (măsurate în aceeaşi unitate de măsură).
- **Segmentele** $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3, B_3]$ sunt **proporționale** cu segmentele $[C_1D_1]$, $[C_2D_2]$, $[C_3, D_3]$, dacă $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = k$, unde $k \in \mathbb{R}$.
  Numărul k se numeşte **coeficient de proporționalitate**.
- Similar se defineşte proporționalitatea între două şiruri a câte 4, 5, ... segmente.

• Găsiți în desenul sarcinii **1** două şiruri a câte 4 segmente proporționale. Cu ce este egal coeficientul de proporționalitate?

2 Împărțiți un segment de 18 cm în trei părți direct proporționale cu numerele 2, 3, 4.

Rezolvăm

Fie x, y, z şirul lungimilor căutate $(x + y + z = 18)$.

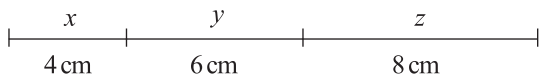
Atunci, între şirurile x, y, z şi 2, 3, 4 există o proporționalitate directă.

Aşadar, $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{18}{9}=2.$

Obţinem: $x=4$ (cm),

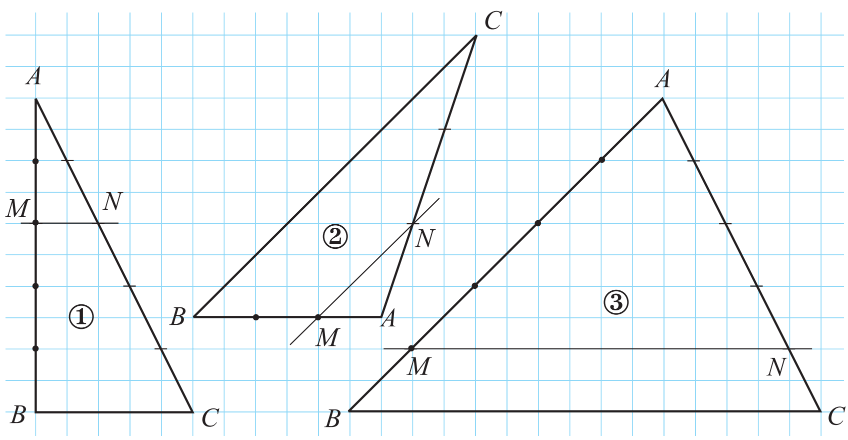
$y=6$ (cm),

$z=8$ (cm).

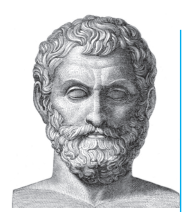


1.2. Teorema lui Thales. Aplicații

1 Examinați desenele şi comparați pentru fiecare caz valorile rapoartelor $\frac{AM}{MB}$ şi $\frac{AN}{NC}$. Ce observați?



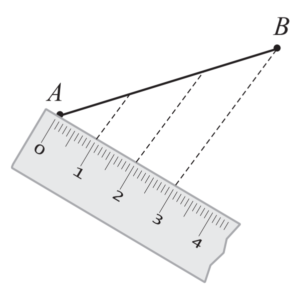
Teorema lui Thales. O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente proporționale.


Thales din Milet – filosof grec (624 î.H.–546 î.H.)

• Pentru fiecare caz al sarcinii **1** formați alte rapoarte egale de segmente.

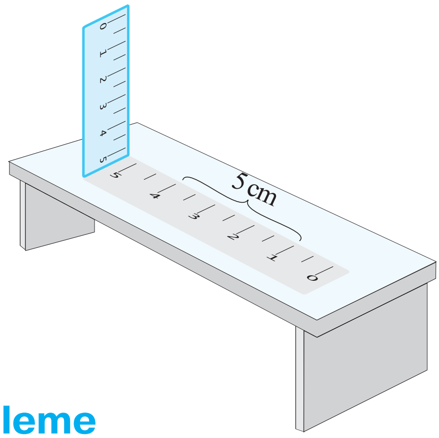
2 Completați pentru a obține reciproca teoremei lui Thales, care, de asemenea, este teoremă: *Dacă o dreaptă care intersectează două laturi ale unui triunghi sau prelungirile lor determină pe ele segmente proporționale, atunci...*

3 Examinați desenul şi explicați cu justificări cum poate fi împărțit un segment în 3 părți egale.



• Construiți un segment cu lungimea de $2\frac{1}{7}$ cm.

Teoremă (a paralelelor echidistante). Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente şi distanţele dintre fiecare două drepte alăturate sunt egale (adică dreptele sunt echidistante).



• Examinaţi desenul.

Pe rigla transparentă (perpendiculară pe masă) sunt marcate notaţiile 0 cm, 1 cm, …, 5 cm. Aflaţi coeficientul de proporţionalitate al rapoartelor dintre lungimile obiectelor şi lungimile umbrelor acestora, dacă distanţa dintre umbra notaţiei 4 cm şi cea a notaţiei 1 cm este egală cu 5 cm.

Exerciţii şi probleme

1

1. Există o proporţionalitate directă între şirurile:

a) 1, 2, 3, 4 şi 5, 6, 7, 8;

b) 2, 3, 4, 5 şi 4, 6, 8, 10;

c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ şi 5, 6, 7;

d) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ şi 2,5; 2; 1?

2. Decideţi dacă numerele primului rând sunt direct proporţionale cu numerele rândului al doilea:

a)

2	4	6	10	12
5	10	15	25	30

b)

1,(3)	0,7	11	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
8	4,2	66	1	0,(3)

3. Completaţi astfel încât numerele primului rând să fie direct proporţionale cu numerele rândului al doilea:

a)

4	6	10	12	
	18			27

b)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12

4. Examinaţi schema şi construiţi câte 5 proporţii, pornind de la proporţia:

a) $\frac{2,4}{3,6}=\frac{4}{6}$;

b) $\frac{0,8}{0,2}=\frac{10}{2,5}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

5. Completați tabelul:

a)

Numărul de cărămizi	Masa (kg)
1	2,5
3	...
5	...
...	100
60	...
...	150

b)

Distanța (km)	Consumul de benzină (l)
100	6
150	...
50	...
...	15
350	...
...	28,5

c)

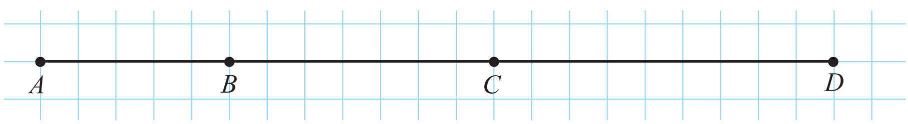
Distanța (km)	Timpul (ore)
60	1
40	...
...	5
90	...
...	4,5
510	...

d)

Consumul de vopsea (l)	Aria (m^2)
1	12
...	8
...	14
3,5	...
6	...
...	100

6. Examinați desenul și calculați raportul segmentelor:

a) AB și CD; b) AC și AD; c) BC și BD; d) AD și AB.



7. Punctul C aparține segmentului AB, astfel încât $\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$. Calculați raportul:

a) $\frac{AB}{AC}$; b) $\frac{BC}{AB}$; c) $\frac{AB}{AB-AC}$; d) $\frac{AB-BC}{AB+AC}$.

8. Calculați:

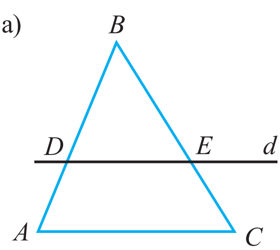
a) MN, dacă raportul lungimilor segmentelor MN și KP este egal cu 2,4 și $KP = 4$ cm;

b) KP, dacă raportul lungimilor segmentelor MN și KP este egal cu 4,2 și $MN = 21$ cm;

c) raportul lungimilor segmentelor MN și KP, dacă $[MN]$ este de 3 ori mai scurt decât $[KP]$.

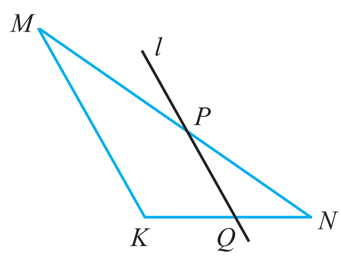
9. Dreapta din desen este paralelă cu o latură a triunghiului. Completați adecvat:

a)



$\frac{BD}{DA}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{EC}{BC}=\frac{\square}{\square}$;

b)

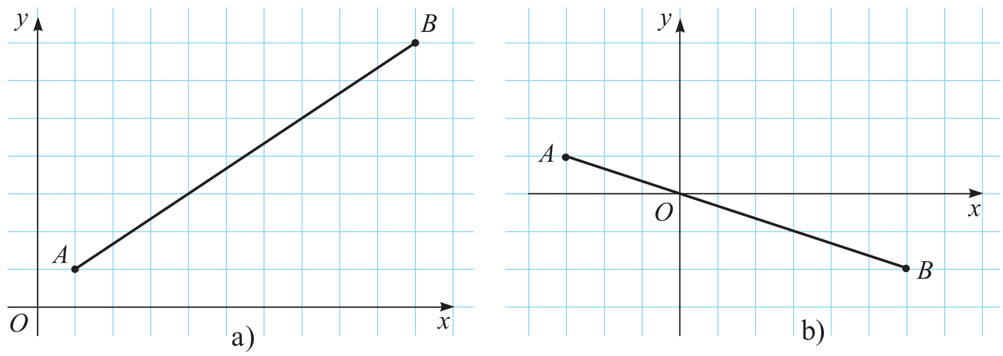


$\frac{MP}{PN}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{KN}{QN}=\frac{\square}{\square}$.

10. Împărțiți un segment de 12 cm în 3 segmente proporționale cu numerele 1, 2, 3.

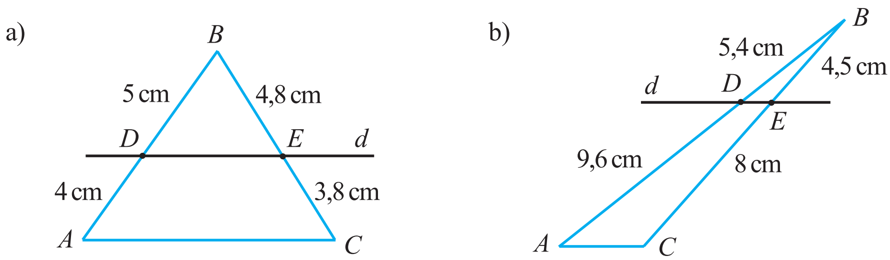
11. Împărțiți un segment de 13,5 cm în 3 segmente proporționale cu numerele 2, 4, 3.

12. Aflați coordonatele a două puncte care împart segmentul AB în 3 segmente consecutive congruente.

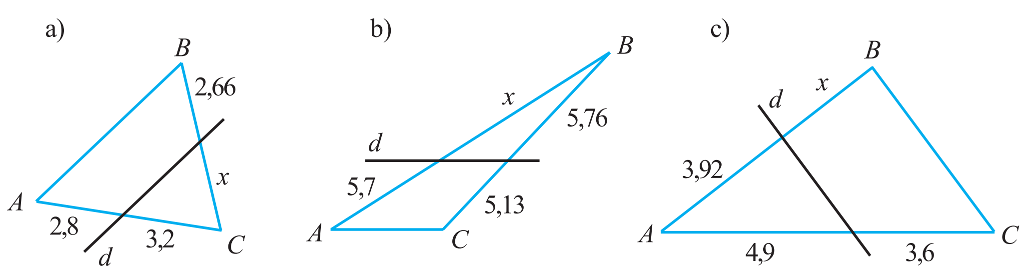


2

13. Examinați desenul și stabiliți dacă dreapta d este paralelă cu o latură a triunghiului:

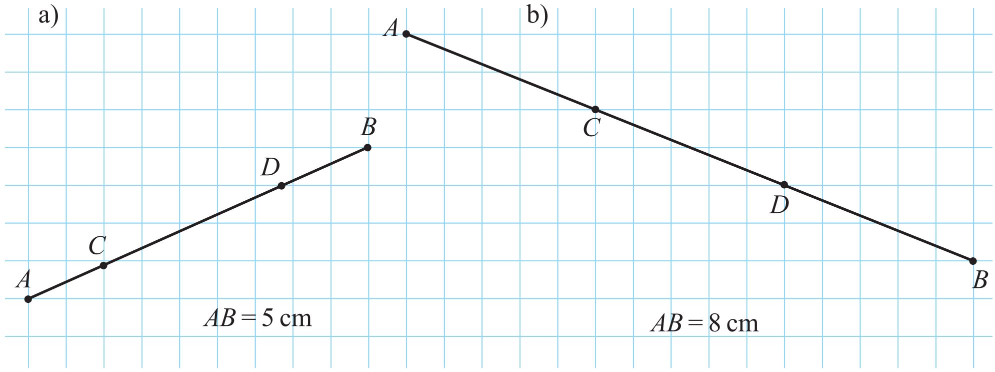


14. Examinați desenul. Dreapta d este paralelă cu o latură a triunghiului. Aflați x.



15. Cu rigla negradată se pot construi drepte paralele echidistante. Luând în considerație acest fapt, împărțiți doar cu rigla:
a) un segment de 6 cm în 4 segmente congruente;
b) un segment de 7 cm în 3 segmente congruente.

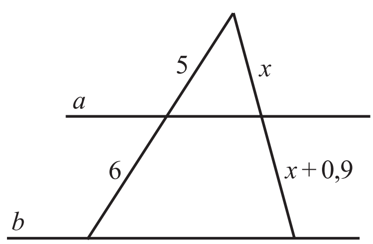
16. Punctele A, B, C, D aparțin liniilor orizontale ale rețelei de pătrate. Examinați desenul și aflați lungimea segmentelor AC, CD și BD:



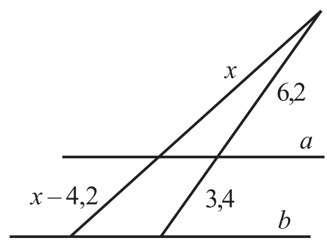
3

17. Dreptele a și b din desen sunt paralele. Aflați valoarea lui x.

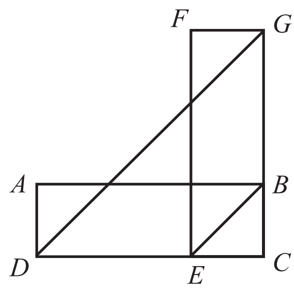
a)

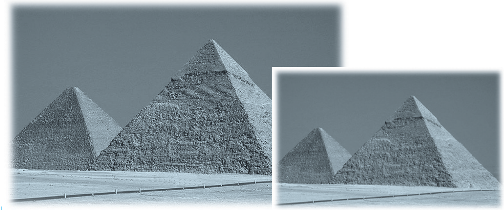


b)



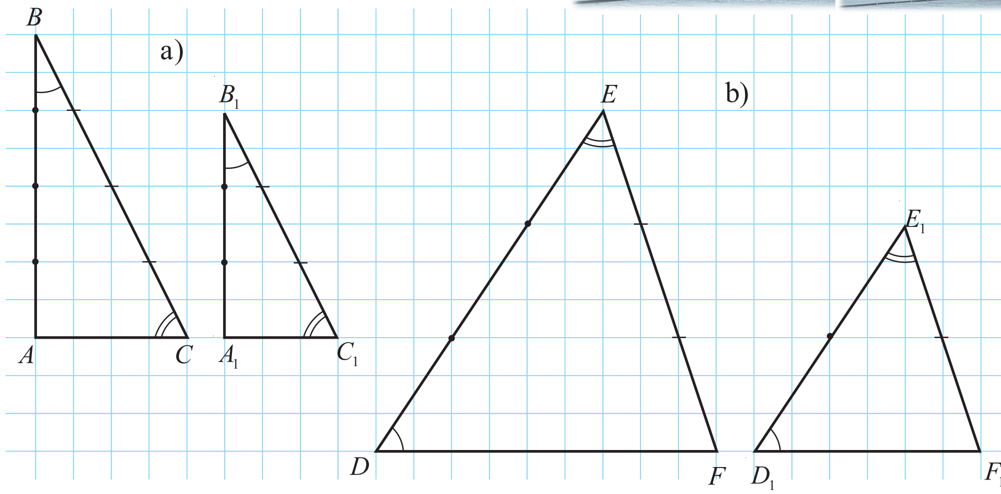
18. Dreptunghiurile $ABCD$ și $EFGC$ au aceeași arie. Demonstrați că $[DG] \parallel [BE]$.





§ 2. Triunghiuri asemenea

1 Examinați desenul şi completați:



a) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \square$, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \square$, $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \square$.

b) $\dfrac{DE}{\square} = \dfrac{EF}{E_1F_1} = \dfrac{\square}{D_1F_1} = \dfrac{3}{2}$, $\angle D \equiv \angle D_1$, $\angle E \equiv \square$, $\square \equiv \angle F_1$.

• Ce proprietăți comune ale celor două perechi de triunghiuri ați descoperit?

Definiție. Două **triunghiuri** se numesc **asemenea** dacă ele au unghiurile respectiv congruente şi laturile respectiv proporționale.

Notația $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ se citeşte „Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea”, ceea ce înseamnă că $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$.

Numărul k se numeşte ***coeficient de proporționalitate*** (sau ***coeficient de asemănare***).

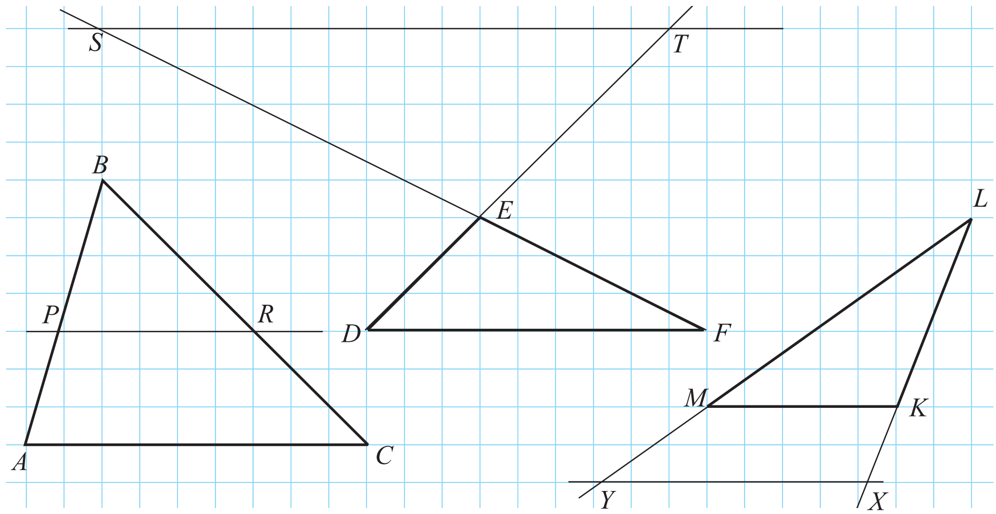
Menționăm că, în genere, din relația $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ nu rezultă, de exemplu, că $\Delta ABC \sim \Delta A_1C_1B_1$.

• Demonstrați teorema:

Teoremă (tranzitivitatea asemănării). Dacă $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta B_2A_2C_2$.

Observație. Două triunghiuri congruente sunt asemenea şi au coeficientul de asemănare 1.

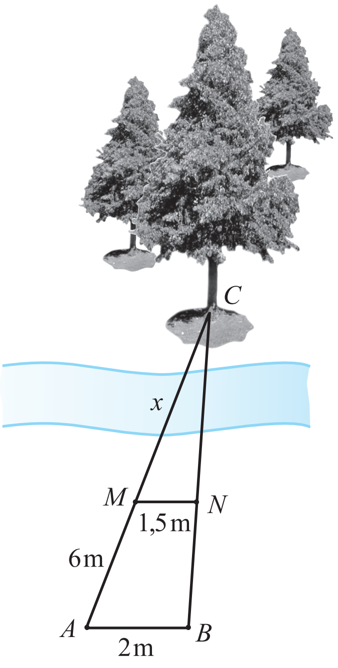
2 Examinați desenele. Aplicând teorema lui Thales și instrumente geometrice, găsiți perechile de triunghiuri asemenea. Formulați o ipoteză referitoare la dreapta care este paralelă cu o latură a unui triunghi.



Teorema fundamentală a asemănării (TFA). O dreaptă paralelă cu una dintre laturile unui triunghi determină cu dreptele-suport ale celorlalte două laturi ale acestuia un triunghi asemenea cu cel dat.

• Examinați desenul $(MN \parallel AB)$.

Distanța dintre copac și punctul M nu poate fi măsurată direct, însă se pot măsura segmentele AM, MN, NB și AB. Aplicând TFA, aflați MC.



Explicăm

① Deoarece $MN \parallel AB$, conform TFA: $\Delta MCN \sim \Delta ACB$.

② $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{MN}{AB}$ (conform ①). Notăm $MC = x$.

$\dfrac{x}{x+6} = \dfrac{1,5}{2} \rightarrow 2x = 1,5(x+6)$

$\rightarrow 2x - 1,5x = 9$

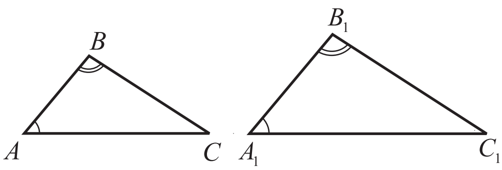
$\rightarrow 0,5x = 9$

Prin urmare, $x = 9 : 0,5 =$ ☐ (m).

Răspuns: ☐ m.

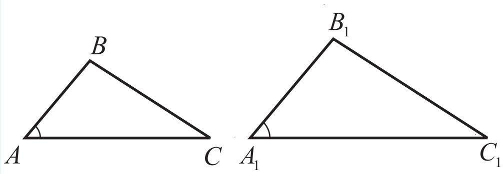
3 Criteriile de asemănare a două triunghiuri

1. Criteriul UU. Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt asemenea.



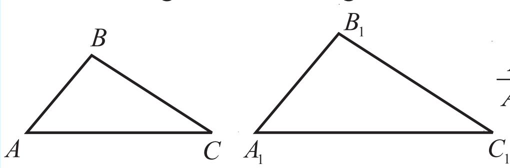
$$\left.\begin{array}{l}\angle A \equiv \angle A_1\\ \angle B \equiv \angle B_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

2. Criteriul LUL. Dacă două laturi ale unui triunghi sunt respectiv proporționale cu două laturi ale altui triunghi şi unghiurile formate de aceste laturi sunt congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}\\ \angle A \equiv \angle A_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

3. Criteriul LLL. Dacă laturile unui triunghi sunt respectiv proporționale cu laturile altui triunghi, atunci triunghiurile sunt asemenea.



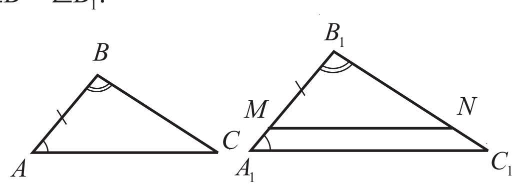
$$\left.\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

Să demonstrăm criteriul de asemănare UU.

Ipoteză: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$.

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Demonstrație:



① Construim punctele M şi N, $M \in [A_1B_1]$, $N \in [B_1C_1]$, astfel încât $[MB_1] \equiv [AB]$ şi $MN \parallel A_1C_1$.

② $\angle B_1MN \equiv \angle A_1$ (ca unghiuri corespondente formate de secanta A_1B_1 cu dreptele paralele MN şi A_1C_1). Prin urmare, $\angle B_1MN \equiv \angle A$ (tranzitivitatea congruenței).

③ $\Delta ABC \equiv \Delta MB_1N$ (Criteriul ULU), deci, $\Delta ABC \sim \Delta MB_1N$ (conform observației, p. 175).

④ $\Delta MB_1N \sim \Delta A_1B_1C$ (Conform teoremei fundamentale a asemănării, deoarece $MN \parallel A_1C_1$).

⑤ Din ③ şi ④ rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (conform tranzitivității asemănării),

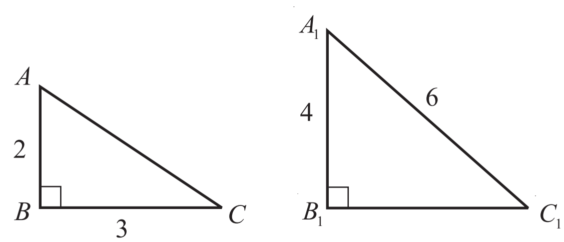
c.c.t.d. ►

4 Aşa cum orice triunghi dreptunghic are un unghi drept, rezultă că două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea dacă au două perechi de laturi omoloage respectiv proporționale sau o pereche de unghiuri ascuțite omoloage congruente.

Criteriile de asemănare a două triunghiuri dreptunghice

1. **Criteriul U.** Dacă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este congruent cu un unghi ascuțit al altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.
2. **Criteriul CC.** Dacă cele două catete ale unui triunghi dreptunghic sunt respectiv proporționale cu două catete ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.
3. **Criteriul CI.** Dacă ipotenuza şi o catetă ale unui triunghi dreptunghic sunt respectiv proporționale cu ipotenuza şi o catetă ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.

• Examinați desenul şi determinați valoarea de adevăr a propoziției „Dacă două laturi ale unui triunghi dreptunghic sunt respectiv proporționale cu două laturi ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea”.



Exerciții și probleme

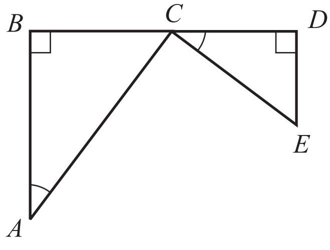
1 ☐ ☐

1. Scrieți relațiile de congruență şi cele de egalitate referitoare la elementele triunghiurilor care rezultă din relația:

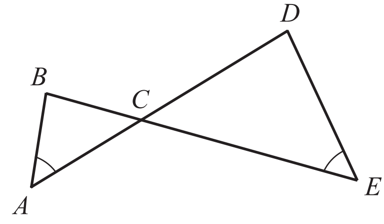
   a) $\Delta TRI \sim \Delta OPT$; b) $\Delta POC \sim \Delta SAT$.

2. Examinați desenul şi recunoaşteți triunghiurile asemenea:

   a)

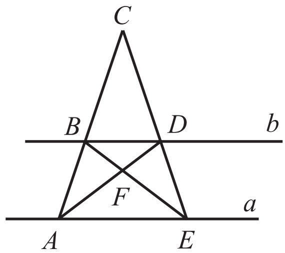


   b)

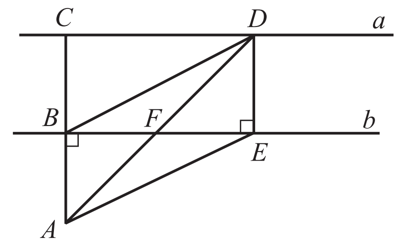


3. Dreptele a şi b sunt paralele. Stabiliţi care triunghiuri sunt asemenea.

a)



b)



4. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă:

a) $m(\angle B)=90°$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $m(\angle F)=35°$;

b) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ şi $m(\angle K)=40°$;

c) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $\angle D \equiv \angle F$.

5. *Adevărat* sau *Fals*?

a) Triunghiurile dreptunghice isoscele sunt asemenea.

b) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta BAC$, atunci ΔCBA este echilateral.

c) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta CBA$ şi $m(\angle A)=60°$, atunci ΔABC este echilateral.

6. Triunghiurile ABC şi DEF sunt asemenea. Aflaţi:

a) perimetrul triunghiului ABC, dacă perimetrul triunghiului DEF este egal cu 22 cm şi $\frac{AB}{DE}=1{,}5$;

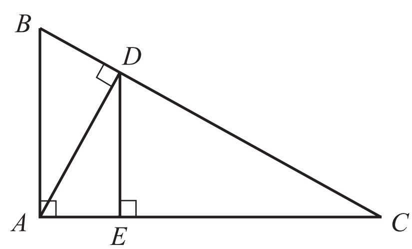
b) coeficientul de proporţionalitate, dacă perimetrul triunghiului ABC este de $\sqrt{5}$ ori mai mare decât al triunghiului DEF.

7. Diagonalele trapezului $ABCD$ cu baza mare AD se intersectează în punctul O. Scrieţi perechile de triunghiuri asemenea formate.

8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $[BM]$, $[EN]$ sunt înălţimile triunghiurilor ABC şi DEF, $M \in AC$, $N \in DF$. Aflaţi alte triunghiuri asemenea.

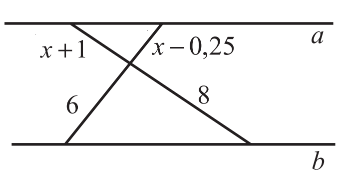
2

9. Examinaţi desenul şi recunoaşteţi triunghiurile asemenea.

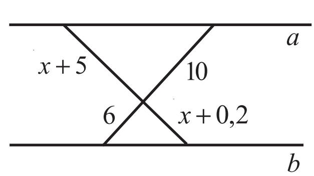


10. Dreptele a şi b sunt paralele. Aflaţi x.

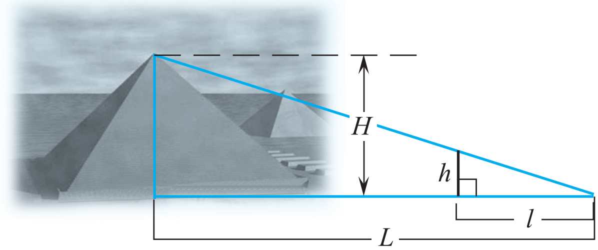
a)



b)



11. Examinați desenul. Aflați înălțimea (H) a piramidei, dacă L este lungimea umbrei piramidei, h – lungimea bățului, iar l – lungimea umbrei bățului și:
a) $L = 90$ m, $h = 1{,}5$ m, $l = 2$ m;
b) $L = 120$ m, $h = 1{,}2$ m, $l = 1{,}8$ m.

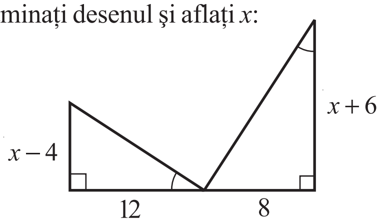


12. Aflați lungimile laturilor unui triunghi cu perimetrul de 52 cm, dacă el este asemenea cu un triunghi cu laturile de 15 cm, 20 cm și 30 cm.

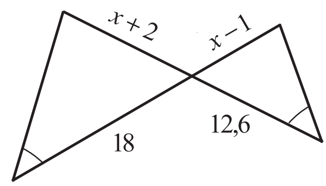
3

13. Examinați desenul și aflați x:

a)



b)



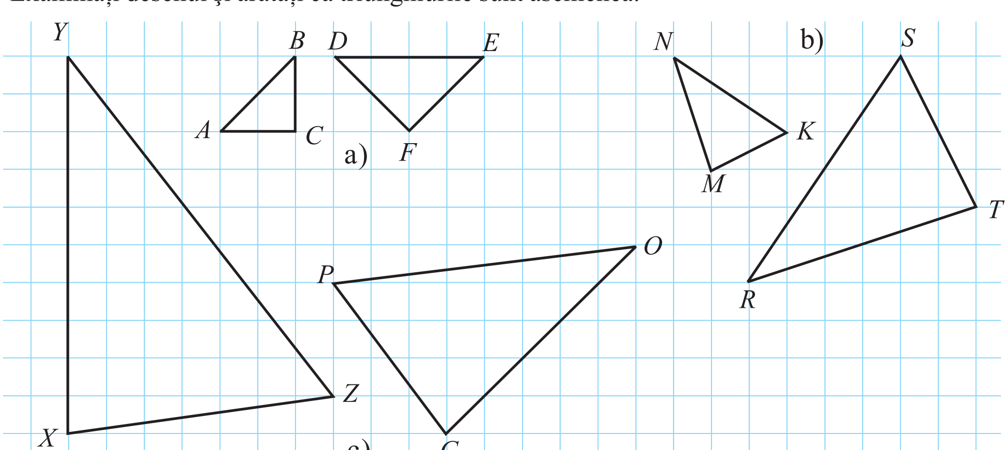
14. Punctele A, B, C, D, E, F aparțin unui cerc. Care două triunghiuri cu vârfurile în cele 6 puncte sunt asemenea, dacă:
a) $\frac{AF}{CD} = \frac{FE}{DB} = \frac{AE}{CB}$; b) $\angle DFE \equiv \angle ABC$, $\angle DEF \equiv \angle BCA$;
c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$ și $\angle ADE \equiv \angle BCF$?

Exerciții și probleme recapitulative

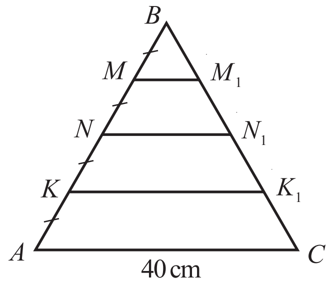
1

1. Scrieți relațiile care rezultă din relația: a) $\Delta SAT \sim \Delta ROC$; b) $\Delta LMN \sim \Delta FED$.

2. Examinați desenul și arătați că triunghiurile sunt asemenea.



3. Examinați desenul. $MM_1 \parallel NN_1 \parallel KK_1 \parallel AC$.
Aflați MM_1, NN_1, KK_1.



4. Prin mijlocul laturii mai mari a unui triunghi trece o dreaptă care „taie” din triunghiul dat un triunghi asemenea cu cel dat. Aflați lungimea laturii mai mici a triunghiului format, dacă laturile triunghiului dat au lungimile egale cu:
a) 8 cm, 9 cm, 10 cm; b) 12 cm, 15 cm, 18 cm.

5. Fie triunghiul ABC cu AB = 12 cm, AC = 6 cm. Se construiește segmentul MK, unde $M \in [AB]$, $K \in [AC]$, astfel încât AM = 4 cm, AK = 2 cm. Arătați că triunghiul format de punctele A, M, K este asemenea cu triunghiul ABC și aflați coeficientul de proporționalitate.

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 74°$ și $m(\angle B) = 76°$. Se construiește segmentul AK, unde $K \in [BC]$, astfel încât triunghiul format de punctele A, B, K este asemenea cu triunghiul ABC. Aflați $m(\angle BAK)$ și $m(\angle AKB)$.

7. Punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez împarte o diagonală în două segmente cu lungimile de 4 cm și 6 cm. Aflați lungimea bazei mari, dacă lungimea bazei mici este de 10 cm.

8. Punctul M aparține laturii AC a triunghiului ABC, astfel încât $\angle ACB \equiv \angle ABM$. Aflați AB, dacă $AM = 5$ cm, $MC = 15$ cm.

2

9. Din 6 segmente cu lungimile de 8 cm, 12 cm, 16 cm, 18 cm, 24 cm și 36 cm au fost formate două triunghiuri asemenea. Aflați coeficientul de proporționalitate a acestor triunghiuri.

10. Fie triunghiul ABC. Demonstrați că triunghiul ale cărui vârfuri sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC.

11. Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, astfel încât $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$ și $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Aflați lungimea medianei A_1M_1, dacă lungimea medianei AM este egală cu 12 cm.

12. Două triunghiuri asemenea necongruente au două perechi de laturi congruente cu lungimile egale cu 6 cm și 9 cm. Aflați lungimile celorlalte laturi ale triunghiurilor.

13. O diagonală a unui trapez împarte trapezul în două triunghiuri asemenea. De câte ori baza mare este mai lungă decât baza mică, dacă o latură laterală a trapezului este de 3 ori mai lungă decât cealaltă latură laterală?

14. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 40°$. Bisectoarea unghiului A împarte triunghiul ABC în două triunghiuri, astfel încât unul din ele este asemenea cu triunghiul ABC. Aflați măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC.

3

15. Fie $[AA_1]$ şi $[BB_1]$ înălțimile triunghiului ABC. Demonstrați că triunghiul cu vârfurile în punctele A_1, B_1 şi C este asemenea cu triunghiul ABC.

Probă de evaluare

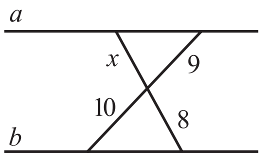
Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

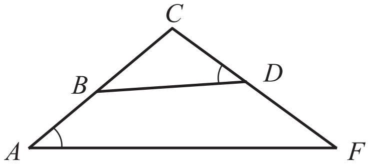
1. Scieți relațiile care rezultă din relația:

$$\Delta PRO \sim \Delta EVA.$$

2. Examinați desenul şi aflați valoarea lui x ($a \parallel b$).



3. Examinați desenul şi aflați două triunghiuri asemenea. Argumentați.



4. Împărțiți segmentul AB de 18 cm în părți proporționale cu numerele 2, 2, 5.

5. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 42$ cm, $E \in [BC]$, astfel încât $\frac{BE}{BC} = \frac{5}{7}$. Dreapta DE intersectează dreapta AB în punctul F. Aflați BF.

1

2

2

2

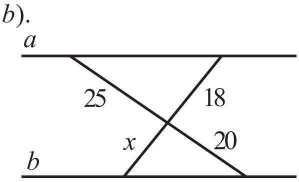
3

Varianta 2

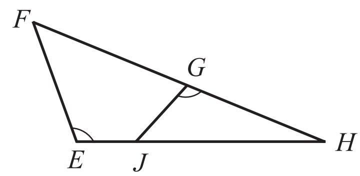
1. Scieți relațiile care rezultă din relația:

$$\Delta CON \sim \Delta RAS.$$

2. Examinați desenul şi aflați valoarea lui x ($a \parallel b$).



3. Examinați desenul şi aflați două triunghiuri asemenea. Argumentați.



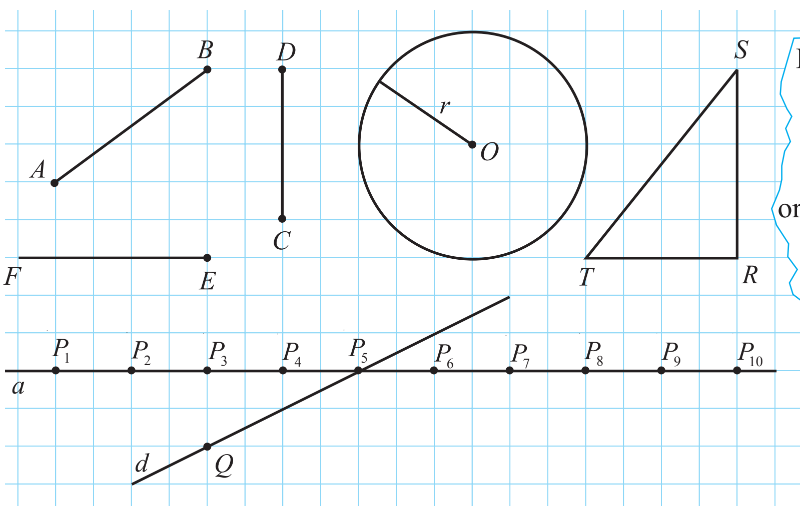
4. Împărțiți segmentul MN de 15 cm în părți proporționale cu numerele 3, 3, 4.

5. Fie pătratul $ABCD$ cu latura de 10 cm. Punctul E aparține laturii CD, astfel încât $\frac{CE}{ED} = 0{,}5$. Aflați distanța dintre punctul C şi dreapta AE.

4 capitolul — Relații metrice în triunghiul dreptunghic

§1. Teorema înălțimii. Teorema catetei

1 Examinați desenul și completați tabelul.

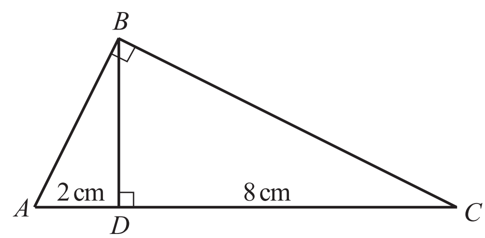


Proiecția ortogonală a unei figuri pe o dreaptă este mulțimea proiecțiilor ortogonale ale punctelor acestei figuri pe dreaptă.

Figura geometrică	$[AB]$	$[CD]$	$\mathscr{C}(O,r)$	ΔSTR	$[EF$	d	P_8	$[QP_5]$
Proiecția ortogonală a figurii pe dreapta a	$[P_1P_3]$							

Observație. În continuare, prin proiecția unei figuri pe o dreaptă vom înțelege proiecția ortogonală a acestei figuri pe dreaptă.

2 Examinați desenul și calculați BD.



Explicăm

① Cercetăm triunghiurile ADB și BDC:

$\angle ADB \equiv \angle BDC$ (unghiuri drepte),

$\angle ABD \equiv \angle BCD$ (au același complement, $\angle CBD$).

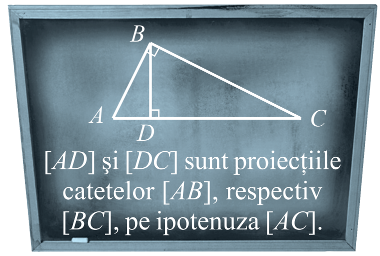
Prin urmare, $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (Criteriul UU). (*)

② Din (∗) rezultă că $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{\square}$ sau

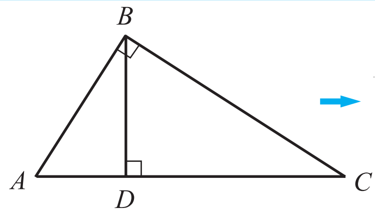
$BD^2 = \square \cdot \square$.

$BD = \sqrt{\square} = \square$ (cm).

Răspuns: $\square$ cm.



Teorema înălțimii. Pătratul lungimii înălțimii unui triunghi dreptunghic corespunzătoare ipotenuzei este egal cu produsul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



$\rightarrow BD^2 = AD \cdot DC$

Rezolvarea problemei **2** sugerează de fapt demonstrația teoremei înălțimii. Să demonstrăm totuși această teoremă.

Ipoteză: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$, $D \in [AC]$, $BD \perp AC$.

Concluzie: $BD^2 = AD \cdot DC$.

Demonstrație:

① $\angle ADB \equiv \angle BDC$ (unghiuri drepte).

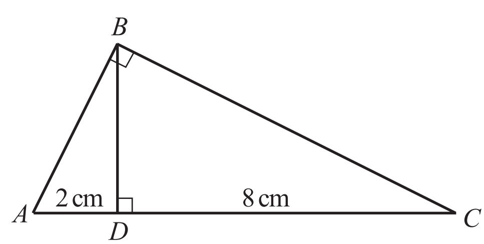
② $\angle ABD \equiv \angle BCD$ (au același complement, $\angle CBD$).

③ $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (din ① și ②, criteriul UU sau criteriul U).

④ Din ③ rezultă că $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{CD}$ sau $BD^2 = AD \cdot CD$. c.c.t.d. ►

• Numărul $\sqrt{ab}$ se numește ***media geometrică*** (sau ***media proporțională***) a numerelor reale pozitive a și b. Utilizând această noțiune, găsiți o altă formulare a enunțului teoremei înălțimii.

3 Examinați desenul și calculați AB.



Explicăm

① Cercetăm triunghiurile ABC și ADB:

$\angle ABC \equiv \angle ADB$ (unghiuri drepte),

$\angle ACB \equiv \angle ABD$ (au același complement, $\angle A$).

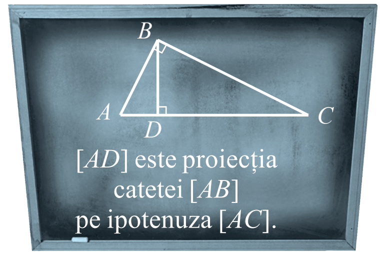
Prin urmare, $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (Criteriul UU). (∗)

② Din (*) rezultă că $\frac{AB}{AD} = \frac{\boxed{}}{AB}$ sau

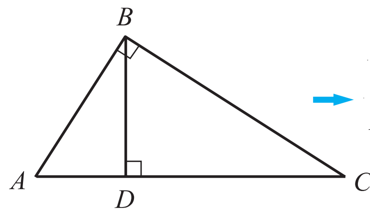
$AB^2 = \boxed{} \cdot \boxed{}$.

$AB = \sqrt{\boxed{}} = \boxed{}$ (cm).

Răspuns: $\boxed{}$ cm.



Teorema catetei. Pătratul lungimii catetei unui triunghi dreptunghic este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei şi lungimea proiecției acestei catete pe ipotenuză.



$$AB^2 = AD \cdot AC$$
$$BC^2 = CD \cdot AC$$

Observație. Rezolvarea problemei **3** sugerează de fapt demonstrația teoremei catetei.

• Demonstrați teorema catetei.

• Utilizând noțiunea de medie geometrică, găsiți o altă formulare a enunțului teoremei catetei.

• Calculați lungimea catetei *BC*.

Exerciții și probleme

1

1. Examinați desenul şi completați tabelul.

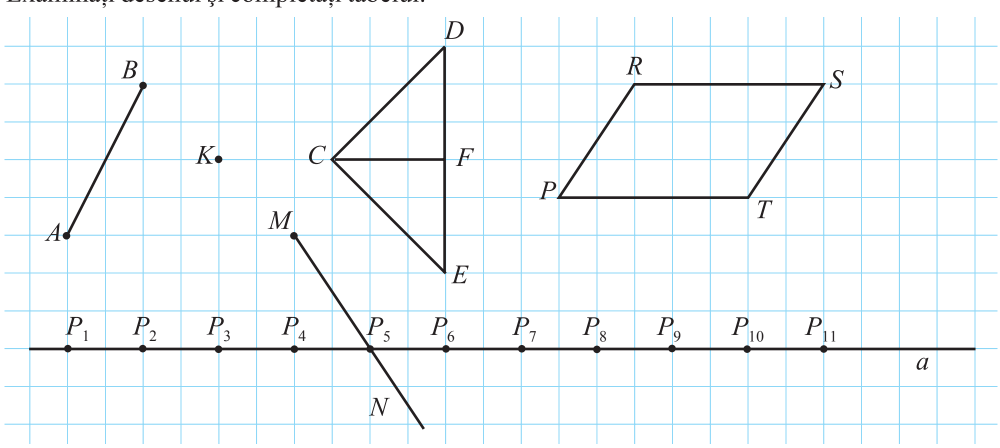
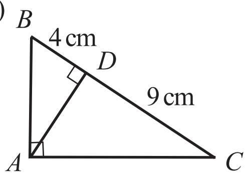
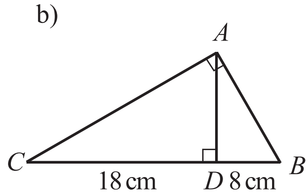
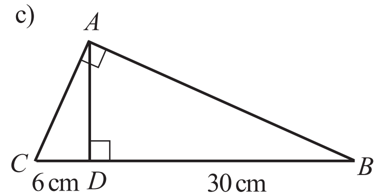


Figura geometrică	$[AB]$	K	ΔCDE	$[MN$	ΔCFE	$[P_5P_9]$	$PRST$	S
Proiecția ortogonală a figurii pe dreapta a								

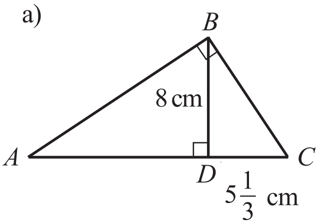
2. Examinați desenul și calculați AD:

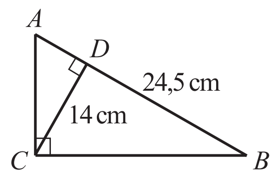
a)


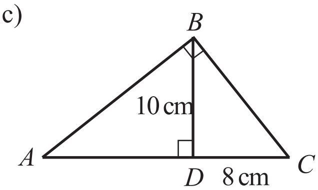
b)


c)


3. Examinați desenul și calculați AD:

a)


b)


c)


4. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, dacă înălțimea triunghiului dusă din vârful unghiului drept împarte ipotenuza în două segmente cu lungimile de:

a) 6 cm și 24 cm; b) 12 cm și 16 cm;

c) 8 cm și 10 cm; d) $\sqrt{3}$ cm și $2\sqrt{3}$ cm.

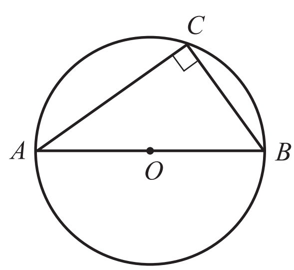
2

5. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egal cu $\frac{5}{6}$, iar lungimea ipotenuzei este de 122 cm. Aflați lungimile segmentelor în care înălțimea dusă din vârful unghiului drept împarte ipotenuza.

6. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egal cu $\frac{3}{7}$, iar înălțimea dusă din vârful unghiului drept are lungimea de 42 cm. Aflați lungimile segmentelor în care această înălțime împarte ipotenuza.

7. Luând în considerație că dacă $[AB]$ este un diametru al unui cerc, iar C este un punct al cercului, atunci $m(\angle C) = 90°$, construiți doar cu rigla și compasul pe rețeaua caietului de matematică un segment cu lungimea de:

a) $\sqrt{15}$ cm; b) $\sqrt{24}$ cm; c) $3\sqrt{4}$ cm.

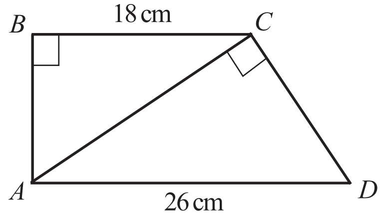


8. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare $[AD]$.
Aflați CD, dacă $BC \perp CD$, $BD \perp AB$, $[AB] \equiv [BC]$ și $AD = 10$ cm.

9. Demonstrați că în orice triunghi dreptunghic lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt proporționale cu pătratele lungimilor catetelor.

10. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $[AC]$. Aflați lungimile catetelor, dacă $AC = 10$ cm.

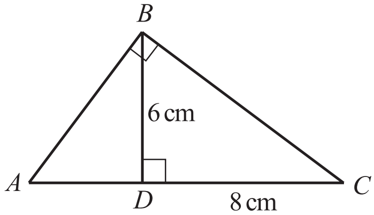
11. Examinați desenul și aflați lungimea înălțimii trapezului $ABCD$.



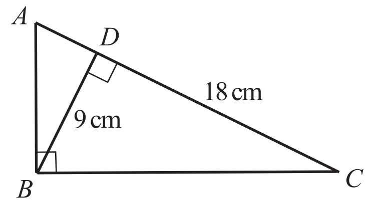
12. Raportul dintre lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egal cu 0,25. Aflați lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept, dacă lungimea ipotenuzei este egală cu 20 cm.

13. Examinați desenul și aflați AD.

a)



b)



3

14. Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu 30 cm, iar lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză reprezintă 80% din lungimea ipotenuzei. Aflați lungimile catetelor.

15. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC și triunghiul ABM este echilateral. Demonstrați că punctul A este proiecția punctului C pe AB.

§2. Teorema lui Pitagora. Aplicații

1 Examinați desenele și completați tabelul. Comparați valorile ultimelor două coloane.

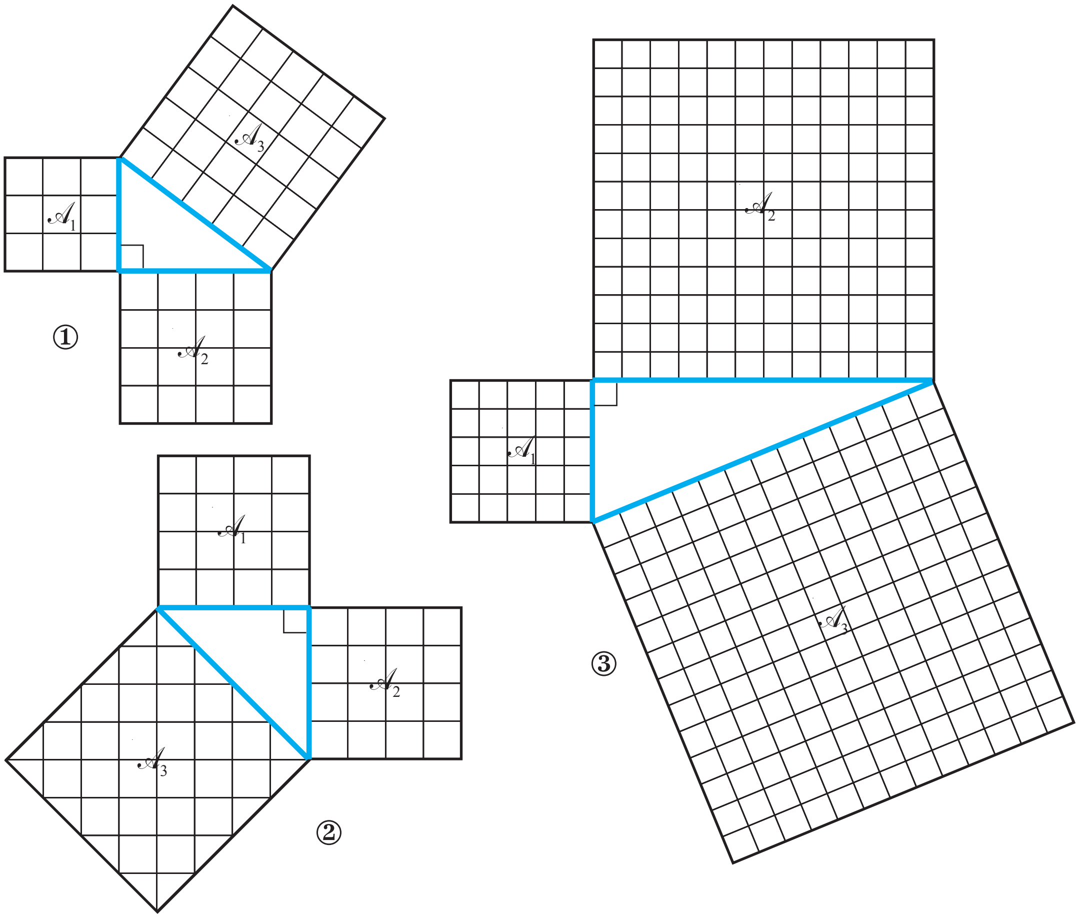
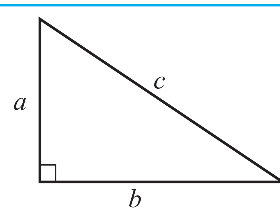


Figura	Aria $\mathcal{A}_1$	Aria $\mathcal{A}_2$	Aria $\mathcal{A}_3$	Aria $\mathcal{A}_1$ + Aria $\mathcal{A}_2$
①		16		
②			32	
③				

• Considerând a și b lungimile catetelor, iar c – lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, formulați o propoziție matematică adevărată care ar exprima dependența lui c de a și b.

Teorema lui Pitagora. Pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor sale.



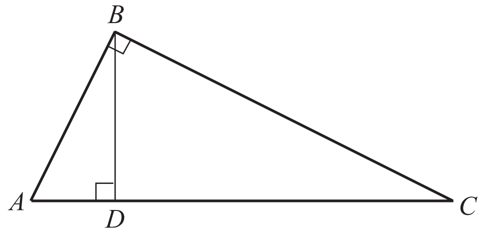
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Să demonstrăm teorema lui Pitagora.

Ipoteză: ΔABC, $m(\angle B)=90°$.

Concluzie: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Demonstrație:



① Construim înălțimea $[BD]$, $D \in (AC)$.

② Aplicăm teorema catetei pentru fiecare dintre catetele triunghiului ABC:

$AB^2 = AD \cdot AC$, (1)

$BC^2 = CD \cdot AC$. (2)

③ Adunând relațiile (1) și (2), obținem

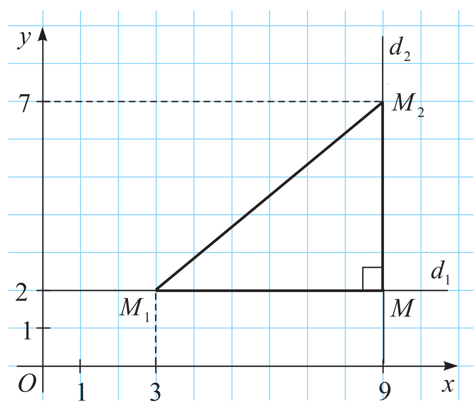
$AB^2 + BC^2 = AD \cdot AC + CD \cdot AC = AC(AD + CD) = AC \cdot AC = AC^2$.

④ Din ③ rezultă că $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c.c.t.d. ►

• Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu 10 cm, iar a unei catete – cu 8 cm. Aflați lungimea celeilalte catete.

• Completați, astfel încât să obțineți **reciproca teoremei lui Pitagora**, care de asemenea este teoremă: *Dacă pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi ale unui triunghi, atunci...*

2 Fie $M_1(3, 2)$ și $M_2(9, 7)$ două puncte într-un sistem de axe ortogonale xOy. Aflați distanța dintre punctele M_1 și M_2.



Explicăm

① Reprezentăm punctele M_1 și M_2 în sistemul xOy.

② Construim prin punctul M_1 dreapta d_1, paralelă cu axa Ox, iar prin punctul M_2 – dreapta d_2, paralelă cu axa Oy.

③ Fie M punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2.

ΔM_1MM_2 – dreptunghic, $m(\angle M)=90°$.

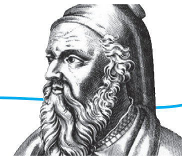
④ Conform teoremei lui Pitagora,

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1M^2 + M_2M^2} = \sqrt{(9 - \square)^2 + (\square - 2)^2} = \square \text{ (u. l.)}.$$

Răspuns: $M_1M_2 = \square$ unități de lungime.

INTERESANT ȘI UTIL

Există circa 300 de modalități de demonstrație a teoremei lui Pitagora. În școala lui Pitagora această teoremă era numită „puntea măgarilor”.



Pitagora – filosof și matematician grec (570 î.H. – 495 î.H.)

• Demonstrați următoarea teoremă.

Teoremă. Dacă $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ sunt două puncte într-un sistem de axe ortogonale, atunci $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

• Aplicând teorema lui Pitagora, construiți un segment cu lungimea de:

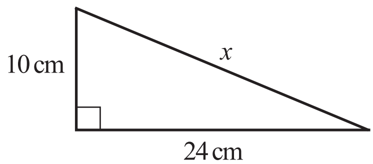
a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $\sqrt{19}$ cm.

Exerciții și probleme

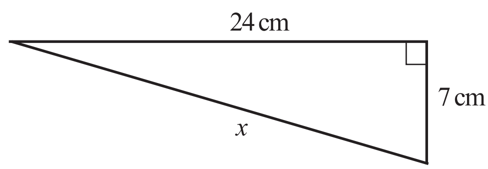
1

1. Examinați desenul și calculați x:

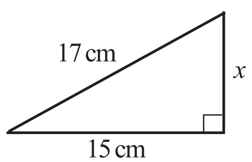
a)



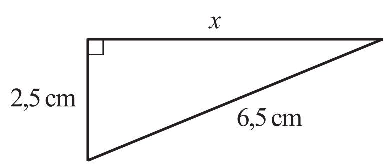
b)



c)



d)



2. Aflați lungimea diagonalei unui dreptunghi cu laturile de 16 cm și 30 cm.

3. Aflați lungimea laturii unui pătrat cu diagonala de $\sqrt{14}$ cm.

4. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu aria de 100 cm^2.

5. Aflați lungimea laturii unui romb cu diagonalele de:

a) 30 cm și 70 cm; b) 140 cm și 48 cm.

6. Calculați înălțimea unui triunghi echilateral cu latura de: a) 10 cm; b) $12\sqrt{3}$ cm.

7. Aflați distanța dintre punctele:

a) $A(-1; 4)$ și $B(4; 12)$; b) $C(4; -3)$ și $D(7; -2)$;

c) $E(7; 5)$ și $F(-5; 11)$; d) $G(9; -9)$ și $H(-1; -4)$.

8. Aflați lungimea laturii unui triunghi echilateral cu înălțimea de: a) 8 cm; b) $\sqrt{3}$ cm.

9. Decideți dacă triunghiul este dreptunghic, știind că lungimile laturilor lui sunt egale cu:

a) 16 cm, 30 cm, 34 cm; b) 8 cm, 12 cm, 16 cm;

c) 9 cm, 15 cm, $3\sqrt{34}$ cm; d) 15 cm, 20 cm, 25 cm.

2

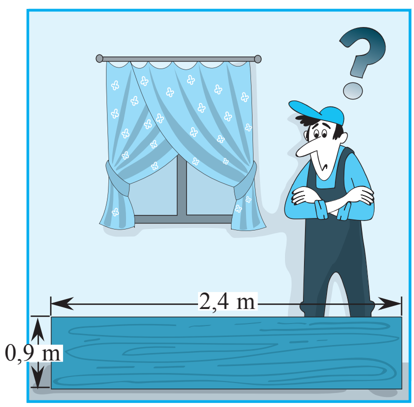
10. Un dreptunghi cu perimetrul de 544 cm are dimensiunile proporționale cu 5 şi 12. Aflați lungimea diagonalei dreptunghiului.

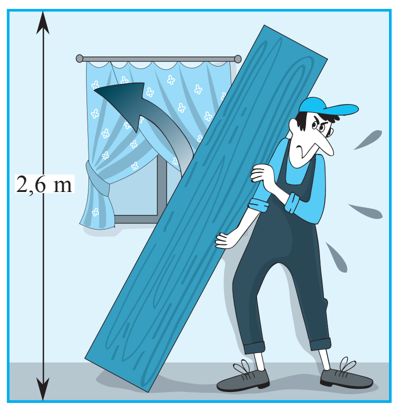
11. Aflați lungimea diagonalei unui dreptunghi cu aria de 480 cm² şi perimetrul de 92 cm.

12. Fie $[CD]$ o înălțime a triunghiului ABC. Aflați AC, dacă $AB = 3$ cm, $CD = \sqrt{3}$ cm, $AD = BC$.

13. O latură a unui triunghi dreptunghic este cu 10 cm mai lungă, iar alta – cu 10 cm mai scurtă decât a treia latură. Aflați lungimea ipotenuzei.

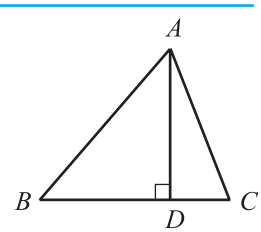
14. Partea laterală a unui dulap are formă dreptunghiulară (vezi desenul) cu dimensiunile: 2,4 m şi 0,9 m. Înălțimea pereților camerei este de 2,6 m. Vor permite dimensiunile dulapului ca acesta să fie ridicat şi sprijinit de perete? Ce lățime maximă ar putea avea partea laterală a dulapului ca acesta să poată fi ridicat?





3

15. Examinați desenul şi aflați AD, dacă $\frac{DB}{CD} = 3,(3)$, $AB = 50$ cm, $AC = 41$ cm.



16. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 10 cm, 17 cm şi 21 cm. Aflați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii mai mari.

17. Demonstrați că într-un trapez dreptunghic diferența pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu diferența pătratelor lungimilor bazelor.

18. ***Matematică distractivă***

Dacă $a^2 + b^2 = c^2$, unde a, b, c sunt numere naturale nenule, atunci a, b, c se numesc **numere pitagoreice**, iar (a, b, c) – **triplet pitagoreic**.

Formați cu numerele 7, 8, 9, 15, 17, 24, 25, 35, 36, 39, 40, 41, 112, 113 cinci triplete pitagoreice (un număr poate fi folosit de mai multe ori).

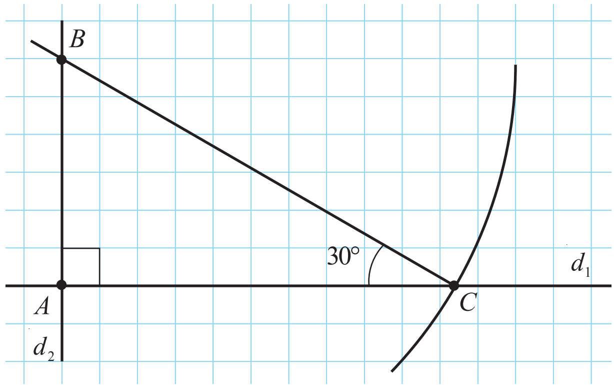
§3. Elemente de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

1 Construiți pe o rețea de pătrate doar cu rigla și compasul un unghi de 30°.

Explicăm

① Rețeaua de pătrate ne permite să construim cu rigla doar drepte paralele și perpendiculare.

Construim dreptele perpendiculare d_1 și d_2, unde $\{A\} = d_1 \cap d_2$.



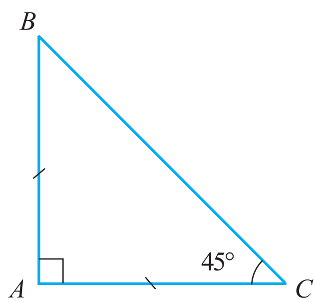
② Construim pe dreapta d_2 un punct arbitrar B.

③ Construim cercul $\mathscr{C}(B,\ 2AB)$, unde $\{C, C_1\} = \mathscr{C}(B,\ 2AB) \cap d_1$ (C_1 nu este reprezentat pe desen).

④ Construim $[CB$.

⑤ $m(\angle ACB) = 30°$ (ΔBAC – dreptunghic, $m(\angle A) = 90°$, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$).

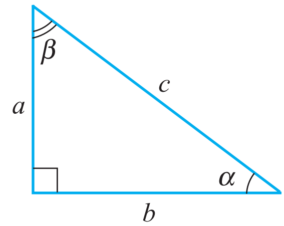
• La rezolvarea problemei, am ținut cont că dacă în triunghiul BAC dreptunghic în A are loc egalitatea $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, atunci $m(\angle BCA) = 30°$. Utilizând desenul și teorema lui Pitagora, determinați care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$ pentru ca unghiul construit BCA să fie de 45°.



Observație. Fiecărui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic îi corespunde o unică valoare a raportului dintre cateta opusă lui și ipotenuză, indiferent de dimensiunile triunghiului și invers.

Această propoziție rămâne adevărată și în cazul altor rapoarte dintre laturile triunghiului dreptunghic. Cum rapoartele menționate determină în mod univoc măsura unghiului, deseori este mai comodă utilizarea acestora decât a unghiurilor. Din acest motiv, rapoartele laturilor unui triunghi dreptunghic au noțiuni și notații speciale.

Definiții. ♦ **Sinusul** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului şi lungimea ipotenuzei.
Sinusul unghiului α se notează prin $\sin\alpha$.
Conform desenului, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.



♦ **Cosinusul** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului şi lungimea ipotenuzei.
Cosinusul unghiului α se notează prin $\cos\alpha$. Conform desenului, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

♦ **Tangenta** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului şi lungimea catetei alăturate.
Tangenta unghiului α se notează prin $\mathrm{tg}\alpha$. Conform desenului, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

♦ **Cotangenta** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului şi lungimea catetei opuse lui.
Cotangenta unghiului α se notează prin $\mathrm{ctg}\alpha$. Conform desenului, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

• Scrieți rapoartele care definesc sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unghiului β al triunghiului reprezentat în definiții.

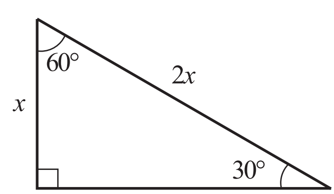
Observații. **1.** Deoarece lungimea catetei este mai mică decât cea a ipotenuzei, sinusul şi cosinusul unui unghi ascuțit sunt numere pozitive mai mici decât 1.

2. Sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta se numesc **funcții trigonometrice**.

3. Funcțiile trigonometrice *sinus* şi *cosinus* se numesc **cofuncții**, la fel ca şi funcțiile *tangentă* şi *cotangentă*.

LUCRARE PRACTICĂ

1. Deoarece cateta opusă unghiului de 30° este de două ori mai scurtă decât ipotenuza, rezultă că $\sin 30° = \frac{1}{2}$.
Examinați desenul.
Aplicând teorema lui Pitagora şi definițiile funcțiilor trigonometrice, calculați:
$\cos 30°$, $\mathrm{tg}30°$, $\mathrm{ctg}30°$, $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\mathrm{tg}60°$, $\mathrm{ctg}60°$.



2. Luând în considerație că dacă un unghi al unui triunghi dreptunghic este de 45°, iar catetele lui sunt congruente, calculați:

$$\sin 45°,\ \cos 45°,\ \mathrm{tg}45°,\ \mathrm{ctg}45°.$$

3. Completați tabelul:

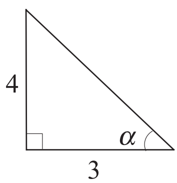
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$			
45°		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

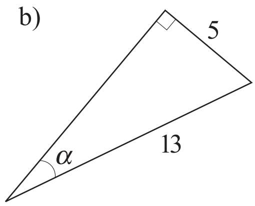
Observație. Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice se numește pe scurt ***tabel trigonometric***.

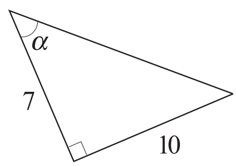
Exerciții și probleme

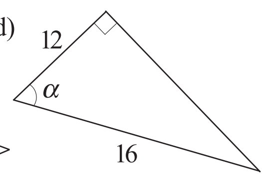
1

1. Calculați, utilizând datele din desen, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$:

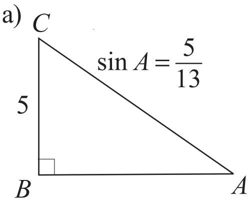
a)


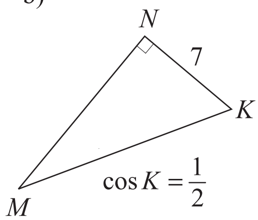
b)


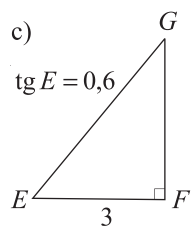
c)


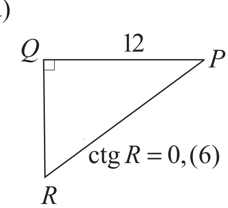
d)


2. Calculați lungimea laturilor necunoscute:

a)


b)


c)


d)


3. Calculați utilizând tabelul trigonometric:

a) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$; b) $\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$; c) $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$; d) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ}$; e) $\frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$.

4. Comparați utilizând tabelul trigonometric:

a) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$ și $\operatorname{tg} 30^\circ$; b) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$ și $\operatorname{tg} 45^\circ$; c) $\operatorname{ctg} 60^\circ$ și $\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$;

d) $\operatorname{ctg} 30^\circ$ și $\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$; e) $\operatorname{tg} 30^\circ$ și $\frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ}$.

5. Utilizând tabelul trigonometric, ordonați crescător numerele:

a) $1,\ \sin 45^\circ,\ \sin 30^\circ,\ 0,\ \sin 60^\circ$; b) $0,\ \cos 45^\circ,\ \cos 30^\circ,\ 1,\ \cos 60^\circ$;

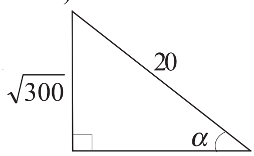
c) $\operatorname{tg} 60^\circ,\ \operatorname{tg} 30^\circ,\ \operatorname{tg} 45^\circ,\ 1,\ 0$; d) $\operatorname{ctg} 30^\circ,\ \operatorname{ctg} 60^\circ,\ \operatorname{ctg} 45^\circ,\ 0,\ 1$.

6. Construiți un triunghi DEF dreptunghic în E, astfel încât:

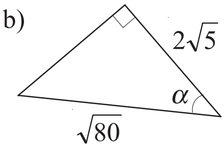
a) $\sin F = 0{,}7$; b) $\cos D = 0{,}5$; c) $\operatorname{tg} F = 1{,}4$; d) $\operatorname{ctg} D = 4\frac{1}{3}$.

7. Calculați măsura α a unghiului, utilizând tabelul trigonometric:

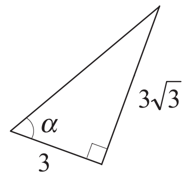
a)



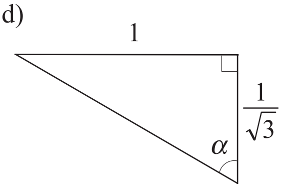
b)



c)



d)

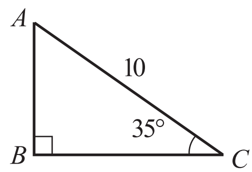


2

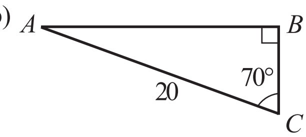
8. Examinați desenul şi panoul, apoi aflați lungimile laturilor necunoscute ale triunghiului ABC:

$\sin 35° \approx 0{,}574$
$\cos 70° \approx 0{,}342$
$\sin 50° \approx 0{,}766$
$\cos 62° \approx 0{,}469$

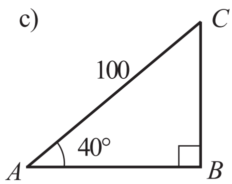
a)



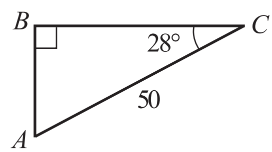
b)



c)



d)



9. Triunghiul ABC este dreptunghic în B, $AB = 15$ cm, $BC = 9$ cm. Calculați:

a) $\sin^2 A + \cos^2 A$; $\sin^2 C + \cos^2 C$;

b) $\frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{tg} A$; $\frac{\sin C}{\cos C}$, $\operatorname{tg} C$;

c) $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\operatorname{ctg} A$; $\frac{\cos C}{\sin C}$, $\operatorname{ctg} C$;

d) $\frac{1}{\cos^2 A}$, $1 + \operatorname{tg}^2 A$; $\frac{1}{\cos^2 C}$, $1 + \operatorname{tg}^2 C$;

e) $\frac{1}{\sin^2 A}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 A$; $\frac{1}{\sin^2 C}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 C$.

10. Perimetrul triunghiului ABC dreptunghic în B este egal cu $\mathcal{P}$. Aflați lungimile laturilor triunghiului, dacă:

a) $\mathcal{P} = 120$ cm, $\operatorname{tg} C = 2{,}4$;
b) $\mathcal{P} = 28{,}8$ cm, $\sin C = 0{,}6$;
c) $\mathcal{P} = 42$ cm, $\operatorname{ctg} A = 1{,}05$;
d) $\mathcal{P} = 57{,}2$ cm, $\cos A = 0{,}352$.

11. Stabiliți dacă propoziția este adevărată:

a) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}$”;

b) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $\cos\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$”;

c) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} + 2$”;

d) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$”.

3

12. Demonstrați că $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ pentru orice unghi ascuțit α.

13. Demonstrați că pentru orice unghi ascuțit α au loc relațiile:

a) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

14. Luând în considerație că $\sin\alpha=0{,}8$ și relațiile din problemele 12, 13, calculați $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

15. Triunghiul *MNK* este dreptunghic în *N*. Calculați:

a) sin *M*, cos *M*, tg *M*, ctg *M*, sin *K*, tg *K*, ctg *K*, dacă $\cos K=0{,}6$;

b) cos *M*, tg *M*, ctg *M*, sin *K*, cos *K*, tg *K*, ctg K, dacă $\sin M=\frac{5}{13}$;

c) sin *M*, cos *M*, tg *M*, ctg *M*, sin K, cos *K*, ctg *K*, dacă $\operatorname{tg}K=2{,}4$;

d) sin *M*, cos *M*, tg *M*, sin *K*, cos *K*, tg *K*, ctg *K*, dacă $\operatorname{ctg}M=1$.

16. a) Se știe ca $\sin 19^\circ\approx 0{,}33$. Calculați $\sin 71^\circ$.

b) Se știe că $\cos 64^\circ\approx 0{,}44$. Calculați $\cos 36^\circ$.

c) Se știe că $\sin 25^\circ\approx 0{,}42$. Calculați $\operatorname{tg} 65^\circ$.

d) Se știe că $\cos 40^\circ\approx 0{,}77$. Calculați $\operatorname{ctg} 50^\circ$.

17. Luând în cosiderație că, pentru orice unghi ascuțit α, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, aflați valoarea expresiei: $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{3\cos\alpha-2\sin\alpha}$, dacă $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Exerciții și probleme recapitulative

1

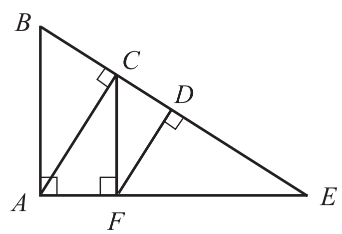
1. Examinați desenul și aflați proiecția:

a) punctului *C* pe *AE*;

b) punctului *F* pe *BE*;

c) segmentului *AC* pe *AE*;

d) segmentului *AF* pe *BE*.



2. Aflați lungimea înălțimii unui triunghi dreptunghic, dacă lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt egale cu: a) 24 cm și 54 cm; b) 36 cm și 49 cm.

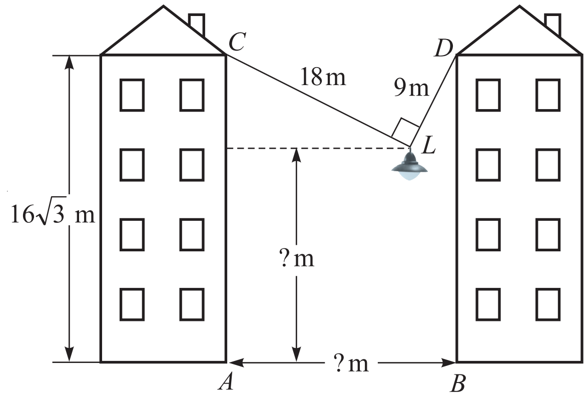
3. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, dacă lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt egale cu: a) 16 cm și 36 cm; b) 0,25 cm și 2 cm.

4. Suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu 34 cm, iar lungimea ipotenuzei este egală cu 26 cm. Aflați lungimile catetelor.

5. Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu 15 cm², iar lungimea ipotenuzei este egală cu $\sqrt{61}$ cm. Aflați lungimile catetelor.

6. Aflați lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu latura de 18 cm.

7. O lampă care iluminează strada este suspendată de două cabluri perpendiculare (vezi desenul, L – lampa, $m(\angle CLD) = 90°$), unul de 18 m, altul – de 9 m, legate la înălțimea de $16\sqrt{3}$ m de la sol. Punctele C şi D se află la aceeaşi înălțime de la sol.
a) Aflați lățimea străzii (adică AB).
b) Calculați la ce înălțime de la sol este suspendată lampa.



8. Aflați lungimea razei cercului care conține vârfurile unui triunghi echilateral cu latura de 9 cm.

9. Aflați lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu aria de $36\sqrt{3}$ cm^2.

10. Vârfurile pătratului $MNKP$ împart fiecare latură a pătratului $ABCD$ în raportul 3:4. Aflați:
a) latura pătratului $MNKP$, dacă $AB = 28$ cm; b) latura pătratului $ABCD$, dacă $MN = 10$ cm.

11. Aflați lungimea bazei unui triunghi isoscel, dacă înălțimea corespunzătoare bazei este de 10 cm, iar înălțimea corespunzătoare laturii laterale – de 12 cm.

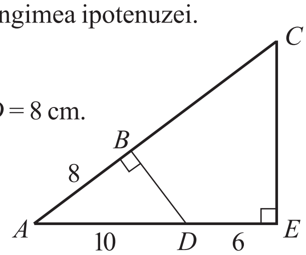
12. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AD, $AB = 6$ cm, $CD = 8$ cm, $AD = 20$ cm, $BC = 10$ cm. Aflați înălțimea trapezului.

2

13. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 10 cm, dacă lungimea înălțimii corespunzătoare ei reprezintă 40% din lungimea ipotenuzei.

14. Fie BD o înălțime a triunghiului ABC.
Aflați BD şi DC, dacă $AB = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $AD = 8$ cm.

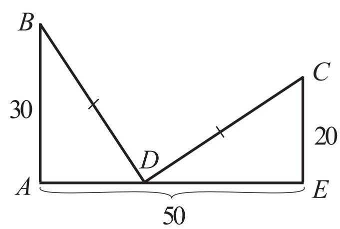
15. Examinați desenul şi calculați BC.
Indicație. Utilizați $\cos A$.



3

16. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°, dacă o catetă este cu 30 cm mai scurtă decât ipotenuza.

17. Examinați desenul şi aflați AD.



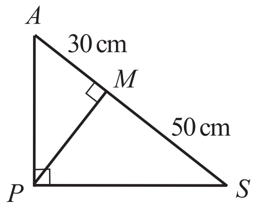
18. Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic bisectoarea unghiului drept este şi bisectoarea unghiului format de mediana şi înălțimea construite din acest vârf.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

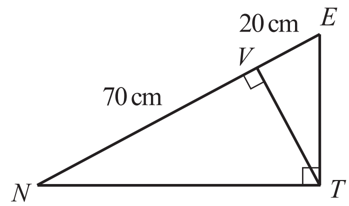
1. Examinați desenul și aflați: 2
   a) proiecția punctului P pe AS;
   b) proiecția catetei PS pe AS.



2. Examinați desenul sarcinii **1** și aflați: 2
   a) PM;
   b) AP și PS.
3. Aflați lungimea diagonalei unui pătrat cu aria de 20 cm². 3
4. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AD, $m(\angle A) = 90°$. Aflați lungimea înălțimii trapezului, dacă: 3
   $AD = 25$ cm, $BC = CD = 13$ cm.

Varianta 2

1. Examinați desenul și aflați:
   a) proiecția punctului T pe NE;
   b) proiecția catetei ET pe NE.

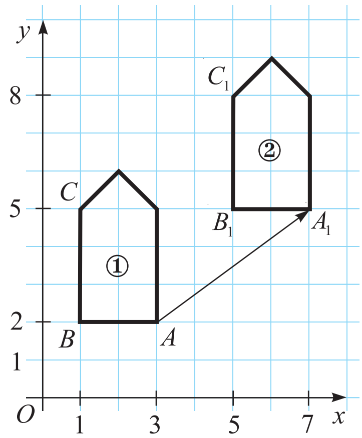


2. Examinați desenul sarcinii **1** și aflați:
   a) VT;
   b) NT și ET.
3. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu aria de 20 cm².
4. Un trapez isoscel are laturile neparalele și baza mică de 34 cm, iar baza mare – de 66 cm. Aflați lungimea înălțimii trapezului.

5 capitolul
Vectori în plan

§1. Translația. Noțiunea de vector

1.1. Translația



1 Figura ② este obținută din figura ① prin deplasarea cu 4 unități de lungime la dreapta şi cu 3 unități de lungime în sus a fiecărui punct al ei.
Observați şi completați:

- Punctul $A(3;\ 2)$ „a trecut” în punctul $A_1(7;\ 5)$.
- Punctul $B(1;\ 2)$ „a trecut” în punctul $B_1(\ \ ;\ \ )$.
- Punctul $C(\ \ ;\ \ )$ „a trecut” în punctul $C_1(5;\ 8)$.
- Dacă punctul $M(x;\ y)$ „a trecut” în punctul $M_1(x_1;\ y_1)$, atunci $x_1 = x+4,\ y_1 = y + \ \ $.

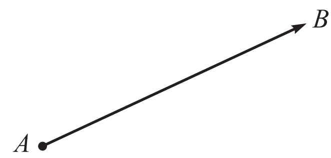
Observație. Se spune că figura ② a fost obținută din figura ① în urma unei translații, definită prin formulele $x_1 = x+4,\ y_1 = y+3$.

Definiție. Transformarea planului în el însuşi, care asociază fiecărui punct $M(x;\ y)$ din plan un punct $M_1(x+a;\ y+b)$, unde a şi b sunt numere reale, se numeşte **translație**.
Punctul M_1 se numeşte **imaginea** punctului M la această translație.

2 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții şi trageți concluzii.
a) Translația păstrează distanța dintre puncte.
b) La o translație, imaginea unui segment este un segment congruent cu el.
c) La o translație, imaginea unei drepte este o dreaptă paralelă cu ea.
d) La o translație, imaginea unui cerc este un cerc congruent cu el.

1.2. Noțiunea de vector

Orice pereche ordonată de puncte A şi B din plan determină un **segment orientat**, notat $\overrightarrow{AB}$.
Punctul A se numeşte **originea**, iar B – **vârful** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.



În afară de origine şi vârf, segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat prin:

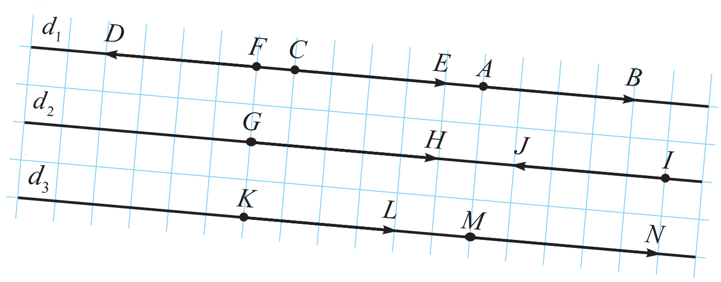
1. **modul** – lungimea segmentului AB (se notează $|\overrightarrow{AB}|$);
2. **direcție** – este determinată de dreapta AB sau de orice altă dreaptă paralelă cu AB;
3. **sens** – este pus în evidență de săgeată (în cazul nostru, se spune „de la A la B”).

Observație. Dacă A şi B sunt două puncte diferite, atunci $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$ sunt două segmente **orientate diferit** (sau **opus orientate**).

1 Examinați desenul şi selectați toate segmentele orientate care au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens cu cele ale segmentului $\overrightarrow{AB}$.

Explicăm

Luând în considerație că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt paralele, obținem că $\overrightarrow{CE}$ şi $\overrightarrow{KL}$ au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens ca şi segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$.

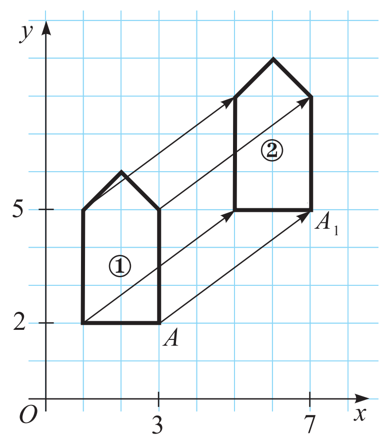


Definiție. Se numeşte **vector** mulțimea tuturor segmentelor orientate care au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens ca şi un segment orientat dat.

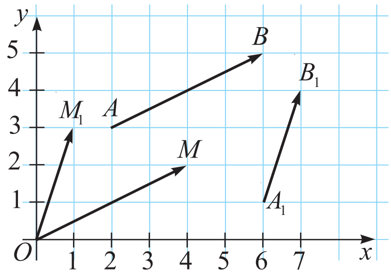
Un vector se notează cu o literă mică din alfabetul latin şi o săgeată deasupra sau cu notația unuia din segmentele orientate care definesc vectorul. Astfel, segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ şi $\overrightarrow{KL}$ (din desenul problemei **1**) definesc acelaşi vector, care poate fi notat $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ sau $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{KL}$ etc.

Observație. Analizând exemplul **1** din secvența 1.1 a paragrafului curent, observăm că fiecare segment orientat cu originea aparținând figurii ① şi vârful care este imaginea acestei origini (şi aparține figurii ②) reprezintă acelaşi vector ca şi $\overrightarrow{AA_1}$ (vezi desenul alăturat).

Prin urmare, putem numi această transformare a planului **translație de vector** $\overrightarrow{AA_1}$.



2 Examinați desenul și comparați creșterile coordonatelor la parcurgerea segmentelor orientate AB și A_1B_1 respectiv cu coordonatele punctelor M și M_1. Ce observați?



Explicăm

$A(2; 3)$, $B(6; 5)$.

Coordonata x crește cu $6-2=4$ (unități), iar y – cu $5-3=2$ (unități).

$M(4; 2)$

$A_1(6; 1)$, $B_1(7; \square)$

Coordonata x crește cu 1 (unități), iar y – cu $\square -1 = \square$ (unități).

$M_1(1; \square)$

Observăm că $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{OM}$ reprezintă același vector, iar $\overrightarrow{A_1B_1}$ și $\overrightarrow{OM_1}$ – alt vector.

Se spune că vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(4; 2)$, iar vectorul $\overrightarrow{A_1B_1}$ – coordonatele $(1; \square)$.

Definiție. Fie punctele $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. **Coordonatele vectorului** $\overrightarrow{AB}$ sunt numerele $x_2 - x_1$ și $y_2 - y_1$.

Notăm $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Observații. **1.** În exemplul **2** vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{A_1B_1}$ pot fi notați respectiv $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ și $\overrightarrow{A_1B_1}(1; 3)$.

2. Vectorul nul are coordonatele $(0; 0)$. Notăm $\vec{0}(0, 0)$.

3. Vectorii egali au coordonate egale: $\vec{u}(a, b) = \vec{v}(c, d)$, dacă $a = c$ și $b = d$.

4. Prin **modulul** (sau **lungimea**) **vectorului** vom înțelege modulul unui segment orientat, reprezentant al acestui vector.

5. Pentru a scurta exprimarea, în loc de expresia „vectorul al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$”, vom spune „vectorul $\overrightarrow{AB}$”.

6. Vectorii coliniari au aceeași direcție (adică se conțin în drepte confundate sau paralele).

7. Fie $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$. Așa cum modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este egal cu lungimea segmentului AB, rezultă că $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

8. La reprezentarea unui vector definit prin coordonatele lui, deseori, pentru comoditate, vom considera punctul $(0; 0)$ originea acestui vector.

Aplicăm

Calculați lungimea vectorului:

a) $\overrightarrow{AB}$, dacă $A(-2; 1)$, $B(6; 16)$;

b) $\vec{a}(3; 4)$.

Rezolvare:

a) $AB = \sqrt{(6-(-2))^2 + (16-1)^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$

b) Considerăm $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, unde O este originea sistemului de axe ortogonale. Prin urmare, M are coordonatele $(3, 4)$. $OM = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$ Adică $|\vec{a}| = 5.$

Concluzie. Modulul vectorului $\vec{a}(a_1; a_2)$ se calculează cu ajutorul formulei $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}.$

Exerciții și probleme

1

1. Aflați imaginile punctelor A, B, C la translația definită de formulele $x_1 = x - 3$ și $y_1 = y + 5$, dacă:

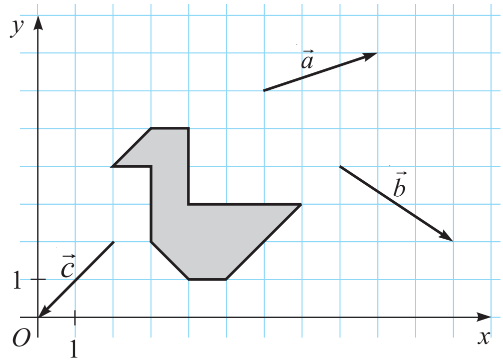
a) $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(4; -6)$;

b) $A(2; 9)$, $B(-3; 7)$, $C(-8; -5)$;

c) $A(0; 4)$, $B(4; -9)$, $C(-11; 7)$.

2. Reproduceți desenul și construiți imaginea figurii colorate la translația de vector:

a) $\vec{a}$; b) $\vec{b}$; c) $\vec{c}$.

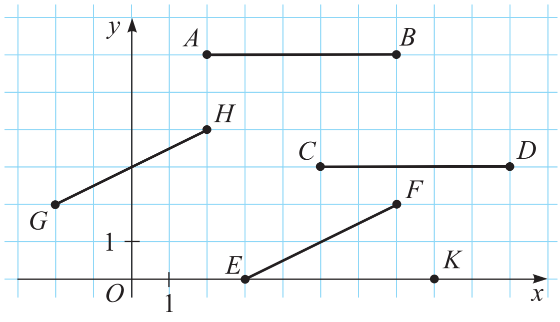


3. Examinați desenul. Scrieți formulele translației care „trece”:

a) segmentul AB în segmentul CD;

b) segmentul EF în segmentul GH;

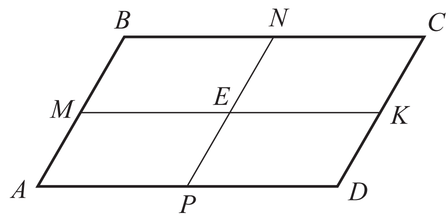
c) segmentul AB în segmentul EK.



4. La o translație, punctul $A(3; 0)$ „a trecut” în punctul $B(0; 3)$. În ce punct „a trecut” la această translație punctul:

a) $M(1; 4)$; b) $N(4; 1)$; c) $K(1; -1)$; d) $P(-3; 7)$?

5. Punctele M, N, K, P sunt mijloacele laturilor paralelogramului $ABCD$ (vezi desenul), iar E este punctul de intersecție a segmentelor MK şi NP. Scrieți toți vectorii (care pot fi puşi în evidență pe desen) egali cu:
a) $\overrightarrow{AM}$; b) $\overrightarrow{BN}$; c) $\overrightarrow{AE}$; d) $\overrightarrow{DE}$.



6. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale un vector cu originea în $O(0;\ 0)$ şi coordonatele:
a) $(3;\ 5)$; b) $(-2;\ 4)$; c) $(-4;\ 2)$; d) $(-7;\ -3)$.

7. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale un vector:
a) cu originea în punctul $A(1;\ 2)$ şi coordonatele $(2;\ 2)$;
b) cu originea în punctul $B(-1;\ 1)$ şi coordonatele $(4;\ -3)$;
c) cu originea în punctul $C(3;\ -4)$ şi coordonatele $(-3;\ 4)$.

8. Aflați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:
a) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$; b) $A(-4;\ 5)$, $B(1;\ 17)$; c) $A(2;\ -5)$, $B(13;\ 55)$; d) $A(-7;\ 6)$, $B(28;\ 18)$.

9. Aflați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ din problema **8**.

10. Aflați modulul vectorului:
a) $\vec{a}(5;\ 12)$; b) $\vec{b}(8;\ 15)$; c) $\vec{c}(7;\ 24)$; d) $\vec{d}(9;\ 40)$.

2

11. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, dacă în urma translației definite de formulele $x_1 = x + 2$, $y_1 = y - 7$ ele „au trecut” respectiv în punctele:
a) $A_1(0;\ 2)$, $B_1(3;\ 1)$, $C_1(-1;\ 1)$; b) $A_1(3;\ 10)$, $B_1(8;\ -4)$, $C_1(6;\ 0)$;
c) $A_1(0;\ -3)$, $B_1(3;\ 8)$, $C_1(-9;\ 6)$.

12. Determinați dacă există o translație care „trece” punctul A în punctul B, iar punctul C în punctul D, dacă:
a) $A(3;\ 3)$, $B(7;\ 5)$, $C(3;\ 1)$, $D(7;\ 3)$; b) $A(-1;\ 3)$, $B(1;\ 2)$, $C(-1;\ -2)$, $D(-1;\ -1)$;
c) $A(-2;\ -1)$, $B(6;\ 1)$, $C(2;\ -2)$, $D(10;\ 0)$.

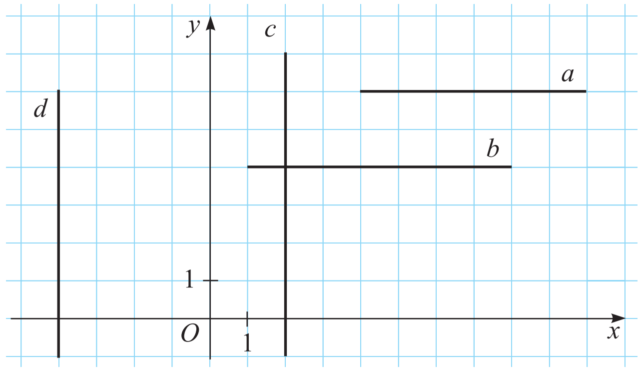
13. Fie $A(-2;\ 4)$ şi $B(0;\ 2)$. Aflați coordonatele punctului C, dacă:
a) segmentele $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt opus orientate şi au acelaşi modul;
b) vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt egali (O este originea sistemului de axe ortogonale);
c) vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt coliniari, au acelaşi sens şi modulul lui $\overrightarrow{OC}$ este de două ori mai mare decât modulul lui $\overrightarrow{AB}$ (O este originea sistemului de axe ortogonale).

14. Aflați numerele reale m şi n pentru care sunt egali vectorii:
a) $\vec{a}(2m-1;\ 8)$ şi $\vec{b}(9;\ 3n-1)$; b) $\vec{a}(10;\ -4n+5)$ şi $\vec{b}(-m+7;\ 13)$;
c) $\vec{a}(m+6;\ 11-n)$ şi $\vec{b}(-3m+14;\ n-11)$.

15. Aflați coordonatele vectorului al cărui modul este egal cu 16 şi care formează cu axa Ox un unghi de: a) $60°$; b) $30°$; c) $45°$.

3

16. Examinați desenul. Scrieți formulele translațiilor care „trec”:
a) dreapta a în dreapta b;
b) dreapta c în dreapta d.

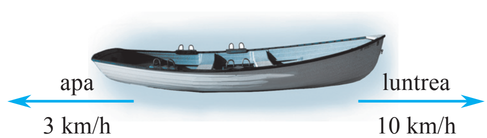


17. Fie punctele $A(-2; 1)$, $B(4; 4)$, $C(-3; 1)$. Aflați coordonatele punctului D, dacă:
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; b) $2|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ şi vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt orientați la fel;
c) $|\overrightarrow{CD}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ şi vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt opuşi orientați.

18. Fie punctele $A(2; 4)$, $B(6; -4)$, $C(-8; -1)$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.

§2. Operații cu vectori

2.1. Adunarea vectorilor



Suma vectorilor $\vec{a}(a_1; a_2)$ şi $\vec{b}(b_1; b_2)$ este vectorul $\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.
Notăm: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

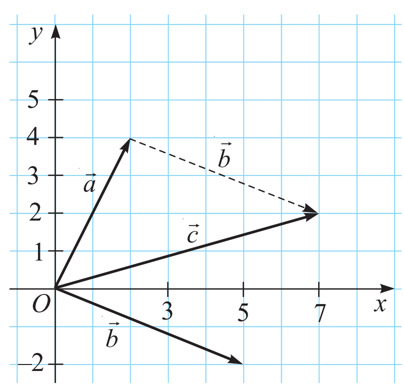
1 Reprezentați în acelaşi sistem de axe ortogonale vectorii $\vec{a}(2; 4)$, $\vec{b}(5; -2)$ şi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Reprezentăm

Ținem cont că $\vec{c}(2+5; 4-2) = \vec{c}(7; 2)$.

În desen am reprezentat vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Vectorul $\vec{c}$ se mai numeşte **rezultanta** vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Rezultanta a doi vectori reprezentați $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se poate desena aplicând regula triunghiului.



Regula triunghiului

Pentru a desena rezultanta (suma) a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, desenăm al doilea vector (adică $\vec{b}$), cu originea în vârful primului vector (adică $\vec{a}$), apoi unim originea primului vector cu vârful vectorului al doilea.

Aplicăm

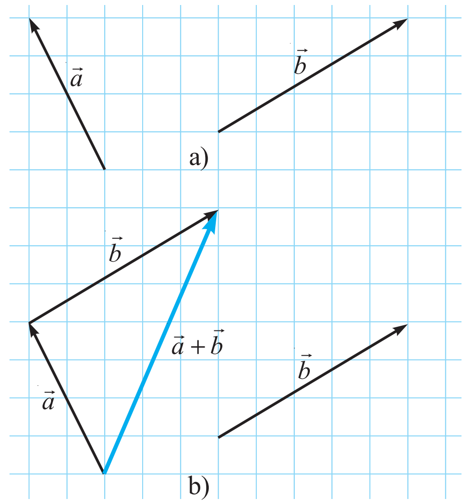
2 Desenați rezultanta vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ reprezentați în desenul (2).

Rezolvare:

Aplicăm regula triunghiului (des. b):

1. redesenăm vectorul $\vec{b}$, astfel încât originea lui să coincidă cu vârful vectorului $\vec{a}$;
2. unim originea lui $\vec{a}$ cu vârful lui $\vec{b}$ (redesenat).

• Reproduceți desenul a), apoi reprezentați vectorul $\vec{b}+\vec{a}$. Ce observați?



Proprietățile adunării vectorilor

Pentru orice vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1° Comutativitatea → $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$.

2° Asociativitatea → $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3° Existența elementului neutru → $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

• Demonstrați proprietatea 2° utilizând coordonatele vectorilor.

2.2. Scăderea vectorilor

Diferența vectorilor $\vec{a}(a_1; a_2)$ și $\vec{b}(b_1; b_2)$ este vectorul $\vec{c}(a_1-b_1; a_2-b_2)$.
Notăm: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Observație. Evident, $\vec{c}$ este diferența vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ dacă și numai dacă $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

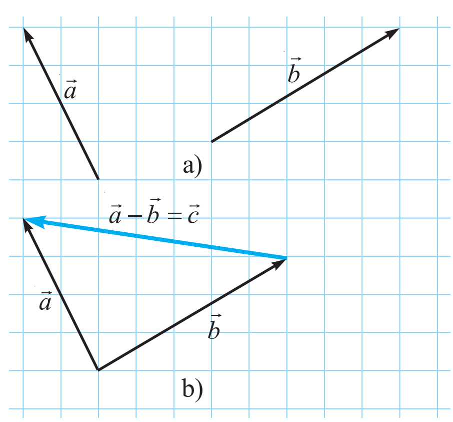
Aplicăm

3 Desenați diferența vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, adică $\vec{a}-\vec{b}$, din desenul a).

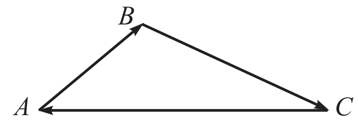
Rezolvare:

Notăm $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Așa cum $\vec{a}$ este suma vectorilor $\vec{b}$ și $\vec{c}$, rezultă că vectorul $\vec{a}$ va avea originea comună cu $\vec{b}$ și vârful comun cu $\vec{c}$:

1. Redesenăm vectorul $\vec{b}$, astfel încât originea lui să coincidă cu a lui $\vec{a}$;
2. Unim originea lui $\vec{b}$ cu vârful lui $\vec{a}$.



Observații. **1.** Dacă ABC este un triunghi, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.



2. Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt 3 vectori nenuli, astfel încât $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, atunci există un triunghi cu laturile $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

2.3. Înmulțirea vectorului cu un număr real

Dacă $\vec{a}(a_1; a_2)$, iar k este un număr real, atunci prin $k\vec{a}$ vom nota vectorul $(ka_1; ka_2)$.

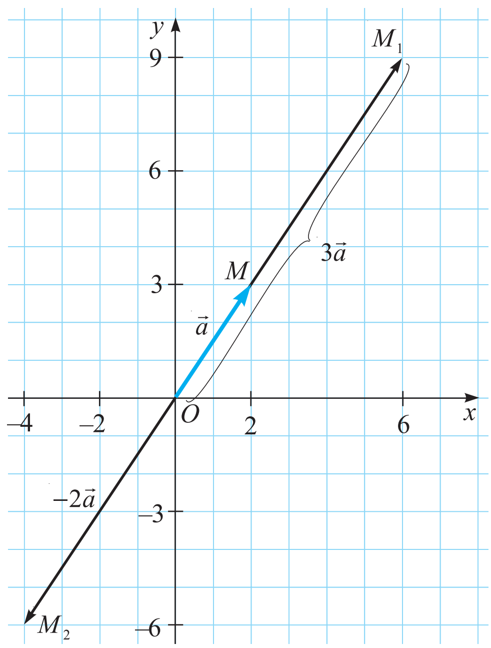
1 Fie $\vec{a}(2; 3)$. Reprezentați vectorii $\vec{a}$, $\vec{u}=3\vec{a}$ şi $\vec{v}=-2\vec{a}$.

Rezolvăm

$3\vec{a}=\vec{u}=(3\cdot 2; 3\cdot 3)=\vec{u}=(6; 9)$.

$-2\vec{a}=\vec{v}=(-2\cdot 2; -2\cdot 3)=\vec{v}=(-4; -6)$.

Pe desen sunt reprezentați vectorii $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_1}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_2}=-2\vec{a}$.



Observații. Fie $\vec{a}$ un vector şi k un număr real.

1. Vectorii $\vec{a}$ şi $k\vec{a}$ sunt coliniari.

2. Vectorii $\vec{a}$ şi $k\vec{a}$ au acelaşi sens pentru $k>0$ şi sens opus pentru $k<0$.

3. Pentru orice k număr natural nenul şi orice vector $\vec{a}$ are lor relația:

$$k\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{k \text{ ori}}.$$

4. Dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt doi vectori coliniari, atunci există un număr real k, astfel încât $\vec{b}=k\vec{a}$.

• Utilizând notația vectorilor prin coordonate, demonstrați că pentru orice vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi pentru orice numere reale k, t au loc următoarele ***proprietăți ale înmulțirii vectorilor cu numere reale***:

1°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; 2°. $(k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$; 3°. $(kt)\vec{a}=k(t\vec{a})$.

Aplicăm

2 Determinați dacă punctele $A(-5; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(7; -1)$ sunt coliniare.

Rezolvare:

Punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există un număr real k, astfel încât $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}(-1-(-5);\ 1-2) = \overrightarrow{AB}(4;\ -1)$;

$\overrightarrow{BC}(7-(-1);\ -1-1) = \overrightarrow{BC}(8;\ -2)$;

$k\overrightarrow{BC}(k\cdot 8;\ k\cdot(-2)) = k\overrightarrow{BC}(8k;\ -2k)$.

Prin urmare, obținem sistemul $\begin{cases} 8k = 4, \\ -2k = -1 \end{cases}$ cu soluția $k = 0{,}5$.

Răspuns: Da, punctele A, B, C sunt coliniare.

2.4. Descompunerea vectorului după doi vectori necoliniari

1 Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari (des. a). Să arătăm că orice vector $\vec{c}$ poate fi reprezentat în forma $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, unde k_1 şi k_2 sunt două numere reale.

Rezolvare:

1) Fie $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Construim prin punctele A şi B drepte paralele respectiv cu $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Fie C punctul lor de intersecție (des. b). Atunci,

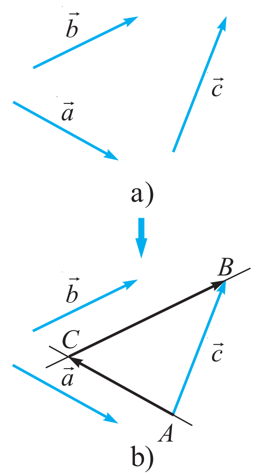
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}. \qquad (*)$$

2) Conform observației 4 din secvența 2.3, aşa cum $\vec{a}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, la fel cum $\vec{b}$ şi $\overrightarrow{CB}$, există numerele reale k_1 şi k_2, astfel încât:

$$\overrightarrow{AC} = k_1\vec{a},\ \overrightarrow{CB} = k_2\vec{b}. \qquad (**)$$

3) Substituim (**) în (*):

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, c.c.t.d. ►

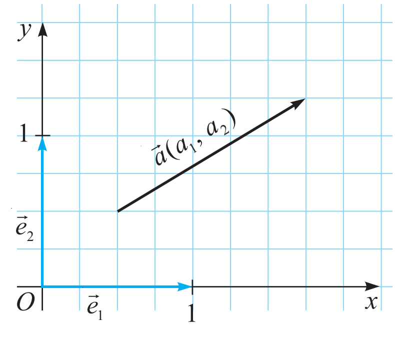


Observație. Relația $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$ din problemă se numeşte **descompunerea vectorului** $\vec{c}$ după vectorii necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

2 Examinați desenul.

Fie vectorii $\vec{e}_1(1, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1)$, $\vec{a}(a_1, a_2)$.

Scrieți descompunerea vectorului $\vec{a}$ după vectorii $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$.



Rezolvare:

Aşa cum $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$ sunt necoliniari, trebuie să aflăm numerele reale k_1 şi k_2, astfel încât

$$\vec{a} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2. \qquad (*)$$

Scriem detaliat relația (*).

$\vec{a}(a_1, a_2) = k_1\vec{e}_1(1, 0) + k_2\vec{e}_2(0, 1)$.

Notăm $k_1\vec{e}_1$ prin $\vec{u}$ şi $k_2\vec{e}_2$ prin $\vec{v}$.

Obținem $\vec{a}(a_1, a_2) = \vec{u}(k_1, 0) + \vec{v}(0, k_2)$ sau $\vec{a}(a_1, a_2) = \vec{c}(k_1, k_2)$, unde $\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$.

Prin urmare, $k_1 = a_1$, $k_2 = a_2$, adică $\vec{a}(a_1, a_2) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.

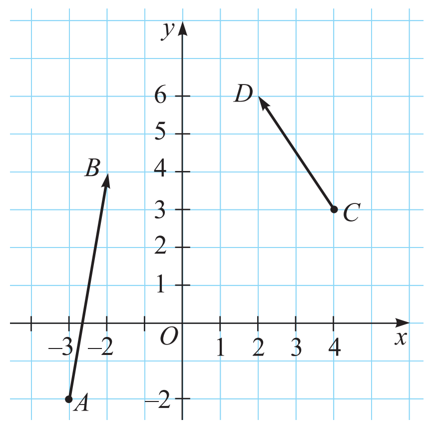
Observație. Vectorii $\vec{e}_1(1, 0)$ şi $\vec{e}_2(0, 1)$ se numesc **vectori unitari**.

2.5. Produsul scalar a doi vectori

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}(a_1; a_2)$ şi $\vec{b}(b_1; b_2)$ este numărul $a_1b_1 + a_2b_2$, notat $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Exemple

1. Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}(1; -4)$ şi $\vec{b}(2; 3)$ este numărul $1\cdot 2 + (-4)\cdot 3 = -10$.
Deci, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -10$.



2. Să calculăm produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ din desenul 1.

Rezolvare:

Avem $A(-3; -2)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 3)$, $D(2; 6)$.

$\overrightarrow{AB}(-2-(-3); 4-(-2)) = \overrightarrow{AB}(1; 6)$,

$\overrightarrow{CD}(2-4; 6-3) = \overrightarrow{CD}(-2; 3)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 1\cdot(-2) + 6\cdot 3 = 16$.

Răspuns: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 16$.

Observații. **1.** Dacă direcțiile a doi vectori sunt perpendiculare, atunci produsul lor scalar este egal cu 0.

2. Dacă produsul scalar a doi vectori este 0, atunci direcțiile lor sunt perpendiculare.

3. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|$, pentru orice vector $\vec{a}$.

Exerciții și probleme

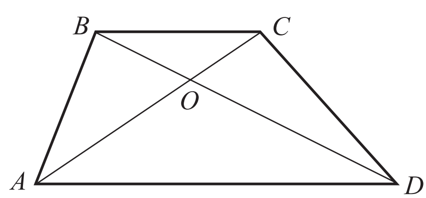
1

1. Examinați desenul și aflați:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$;

b) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$;

c) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OD}$.



2. Examinați desenul problemei precedente și aflați:

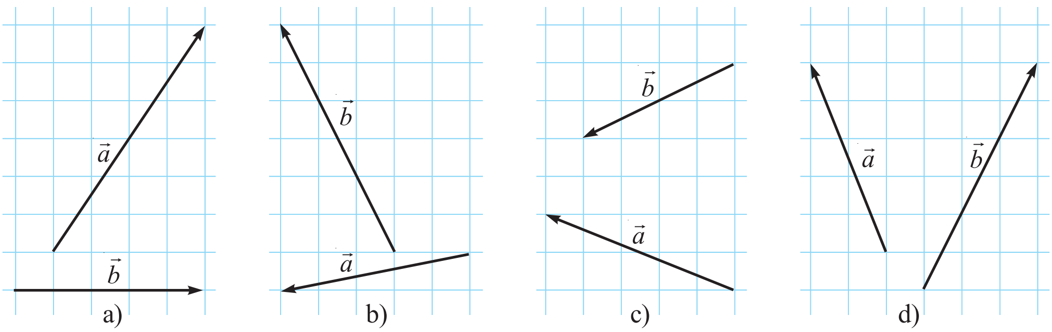
a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BO}$; c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}$.

3. Fie vectorii $\vec{a}(-3; \sqrt{5})$, $\vec{b}(0{,}8; -6)$. Aflați coordonatele vectorului:
a) $\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{b}-\vec{a}$; c) $2\vec{a}$; d) $0{,}5\vec{b}$; e) $3\vec{a}-2\vec{b}$.

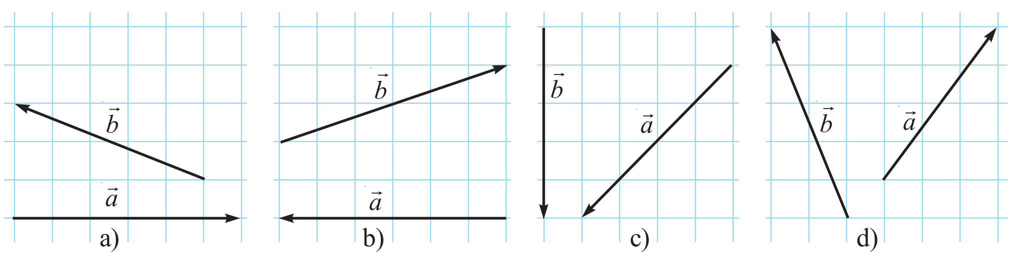
4. Fie vectorii $\vec{a}(12; 16)$, $\vec{b}\left(\frac{2}{3}; -9\right)$. Aflați coordonatele vectorului:
a) $\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{a}-\vec{b}$; c) $0{,}25\vec{a}$; d) $3\vec{b}$; e) $6\vec{b}+2\vec{a}$.

5. Fie vectorii $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-1; 3)$. Aflați modulul vectorului:
a) $2\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{a}-2\vec{b}$; c) $3\vec{a}-3\vec{b}$; d) $-5\vec{a}+4\vec{b}$.

6. Reproduceți desenul, apoi construiți suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.



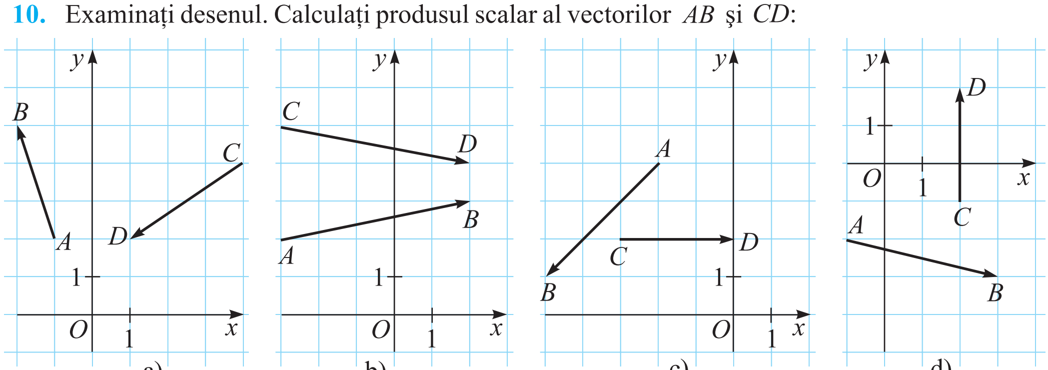
7. Reproduceți desenul, apoi construiți diferența $\vec{a}-\vec{b}$.



8. Pentru fiecare din desenele problemei 7 construiți vectorii $2\vec{a}$ și $-2\vec{b}$.

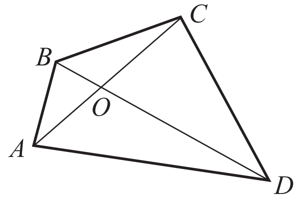
9. Calculați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:
a) $\vec{a}(3; 1)$, $\vec{b}(0; 5)$; b) $\vec{a}(2; -4)$, $\vec{b}(6; 2)$;
c) $\vec{a}(\sqrt{2}; 3)$, $\vec{b}(3\sqrt{2}; 1)$; d) $\vec{a}\left(-8; \frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{3}{4}; 9\right)$.

10. Examinați desenul. Calculați produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$:



2

11. Examinați desenul și aflați:



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

b) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$.

12. Punctele M și N sunt respectiv mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC. Completați: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+$ ___, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+$ ___. Prin urmare, $2\overrightarrow{MN}=$ ___.

13. Determinați vectorul $\vec{x}$, știind că:

a) $\vec{x}+\vec{a}(-5;\,3)=\vec{b}(3;\,2)$;

b) $\vec{a}(-1;\,6)-2\vec{x}=\vec{b}(9;\,10)$;

c) $3\vec{x}+\vec{a}(4;\,8)=\vec{b}(-8;\,23)$;

d) $\vec{a}(7;\,13)+\vec{x}=2\vec{x}-\vec{b}(0;\,5)$.

14. Determinați dacă punctele A, B și C sunt coliniare, știind că:

a) $A(5;\,4)$, $B(2;\,2)$, $C(11;\,8)$;

b) $A(10;\,-2)$, $B(-3;\,1)$, $C(2;\,0)$;

c) $A(-5;\,-2)$, $B(10;\,3)$, $C(4;\,1)$;

d) $A(6;\,0)$, $B(2;\,3)$, $C(-1;\,-1)$.

15. Aflați valoarea lui m pentru care direcțiile vectorilor $\vec{a}(3;\,2)$ și $\vec{b}(m-1;\,6-2m)$ sunt perpendiculare.

16. Demonstrați că dreptele AB și CD sunt perpendiculare, știind că:

a) $A(-1;\,2)$, $B(-2;\,5)$, $C(1;\,2)$, $D(4;\,3)$;

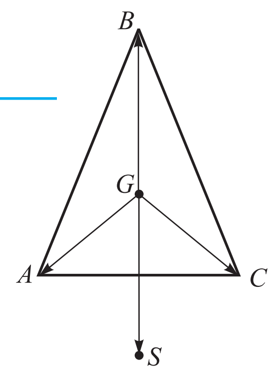
b) $A(2;\,3)$, $B(-3;\,2)$, $C(-3;\,3)$, $D(-2;\,0)$;

c) $A(-2;\,4)$, $B(-5;\,1)$, $C(-3;\,2)$, $D(0;\,-1)$;

d) $A(3;\,-3)$, $B(-1;\,-2)$, $C(2;\,-1)$, $D(3;\,3)$.

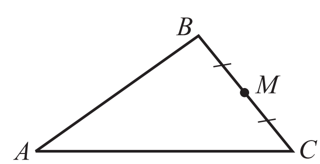
3

17. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului isoscel ABC cu baza AC, iar S – un punct, astfel încât $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GS}$. Demonstrați că $AGCS$ este un romb.



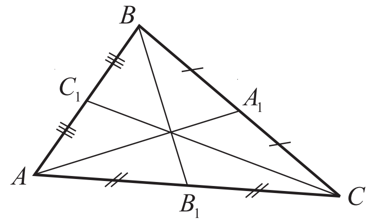
18. Demonstrați că pentru orice vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are loc relația $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

19. Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$. (*Indicație*. „Completați” triunghiul ABC până la un paralelogram.)



20. Punctul M este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

21. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC (vezi desenul). Demonstrați că $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$.



22. Demonstrați că pentru orice triunghi ABC există alt triunghi cu laturile paralele și congruente respectiv cu medianele triunghiului ABC. (*Indicație*. Utilizați observația 2 din secvența 2.1.)

23. Aflați vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$, dacă:

a) $\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}(-2;\ 6);\\ 2\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}(5;\ 0);\end{cases}$ b) $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}(-3;\ 7);\\ 3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}(16;\ 1);\end{cases}$ c) $\begin{cases}-\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}(12;\ -3);\\ 4\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}(-6;\ -2).\end{cases}$

24. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. (*Indicație*. Utilizați relația din problema **21** și relația $\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$, unde M este mijlocul laturii BC.)

25. Fie $ABCD$ un paralelogram. Completați:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boxed{\quad\quad}$. (1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boxed{\quad\quad}$. (2)

Ridicând fiecare dintre relațiile (1) și (2) la pătrat, obținem:

$\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\boxed{\quad\quad}$. (3) $\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\boxed{\quad\quad}$. (4)

Adunând relațiile (3) și (4), obținem $2AB^2+2AD^2=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$.

26. Demonstrați că pentru orice numere reale nenule a, b, c direcția vectorului $\vec{v}(a,b)$ este perpendiculară pe dreapta $ax+by=c$.

Exerciții și probleme recapitulative

1

1. Aflați imaginile punctelor A, B, C la translația definită de formulele $x_1=x+4$ și $y_1=y-3$, dacă:

a) $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(-1;\ 3)$; b) $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ 7)$, $C(2;\ -6)$;
c) $A(4;\ 4)$, $B(12;\ 5)$, $C(0;\ 8)$.

2. Scrieți formulele translației care „trece”:

a) punctul $A(4;\ 10)$ în punctul $A_1(10;\ 4)$;
b) punctul $B(-5;\ 8)$ în punctul $B_1(8;\ 2)$;
c) punctul $O(0;\ 0)$ în punctul $O_1(7;-6)$.

3. La o translație, punctul $A(0;\ -1)$ „trece” în punctul $A_1(1;\ 3)$. În ce punct „trece”:

a) punctul $B(2;\ 4)$; b) originea sistemului de axe ortogonale;
c) punctul $C(5;\ 4)$; d) simetricul punctului $D(3;\ 2)$ față de $O(0;\ 0)$?

4. Aflați lungimea segmentului AB, dacă:

a) $A(7;\ 4)$, $B(3;\ 1)$; b) $A(5;\ 2)$, $B(-1;\ 2)$; c) $A(4;\ -1)$, $B(8;\ 2)$; d) $A(4;\ 3)$, $B(0;\ 1)$.

5. Aflați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:
a) $A(5; 3)$, $B(5; 4)$; b) $A(0; -9)$, $B(1; 1)$;
c) $A(0; 8)$, $B(-8; 0)$; d) $A(10; -3)$, $B(2; 1)$.

6. Fie punctele $A(2; 1)$, $B(4; 5)$ şi $C(1; -3)$. Aflați coordonatele punctului D, ştiind că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

7. Aflați modulul vectorului AB, ştiind că:
a) $A(1; 0)$, $B(2; 1)$; b) $A(-4; 3)$, $B(6; 27)$;
c) $A(9; -9)$, $B(18; 3)$; d) $A(-17; -22)$, $B(1; 58)$.

8. Aflați opusul vectorului de coordonate:
a) $(5; 3)$; b) $(-7; 2)$; c) $(6; 8)$; d) $(0; -25)$.

9. Determinați coordonatele vârfului vectorului care are:
a) originea $A(3; 3)$ şi coordonatele $(1; -1)$;
b) originea $B(5; 0)$ şi coordonatele $(-2; 7)$;
c) originea $C(-4; 9)$ şi coordonatele $(3; -4)$;
d) originea $D(9; -4)$ şi coordonatele $(-5; 0)$.

10. Calculați suma vectorilor:
a) $(6; 2)$ şi $(-5; 4)$; b) $(16; 2)$ şi $(1; -1)$; c) $(4; 8)$ şi $(4; -3)$; d) $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2}; 7\right)$.

11. Aflați diferența vectorilor din exercițiul 10.

12. Aflați produsul scalar al vectorilor din exercițiul 10.

13. Fie $A(3; 2)$, $B(-5; 3)$.
a) Aflați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, unde $O(0; 0)$.
b) Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
c) Aflați coordonatele vectorilor $2\overrightarrow{AB}$, $0{,}5\overrightarrow{OA}$, $4\overrightarrow{AB}$.

14. Fie rombul $ABCD$. Determinați:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

2

15. Aflați valoarea lui x, dacă:
a) $\vec{a} = (x; 10)$ şi $|\vec{a}| = 26$; b) $\vec{a} = (10; x)$ şi $|\vec{a}| = 12{,}5$;
c) $\vec{a} = (x; 8)$ şi $|\vec{a}| = 4\sqrt{13}$; d) $\vec{a} = (-9; x)$ şi $|\vec{a}| = 3\sqrt{13}$.

16. Fie $\overrightarrow{AB}(3; -2)$, $\overrightarrow{BC}(-4{,}5; 3)$. Demonstrați că punctele A, B, C sunt coliniare.

17. Stabiliți dacă sunt coliniari vectorii:
a) $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}(1; 3)$; b) $\vec{a}(0; -1)$, $\vec{b}(1; 0)$;
c) $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(-3; 2)$; d) $\vec{a}(4; -2)$, $\vec{b}(-2; 1)$.

18. Fie punctele $A(1; -2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 3)$. Aflați lungimile laturilor triunghiului.

19. Pentru care valoare a lui x sunt perpendiculari vectorii:
a) $\vec{a}(3; 2)$, $\vec{b}(x; -1)$; b) $\vec{a}(5; x)$, $\vec{b}(0; -3)$; c) $\vec{a}(x; -6)$, $\vec{b}(4; 5)$?

3

20. Fie $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$, $D(1; 6)$.
a) Demonstrați că $AD \parallel BC$. b) Aflați aria lui $ABCD$.

21. Fie punctele $A(3; 5)$, $B(-3; 1)$. Aflați coordonatele punctului C de pe axa Ox, dacă se știe că triunghiul ABC este isoscel cu baza $[AB]$.

22. Determinați tipul triunghiului ABC (după laturile lui), dacă:
a) $A(-1; -1)$, $B(6; 0)$, $C(2; 3)$;
b) $A(3; -1)$, $B(1; 2)$, $C\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

23. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$, dacă:
a) $A(3; 2)$, $B(8; 6)$, $C(3; 6)$, $D(8; 2)$;
b) $A(6; 0)$, $B(5; 6)$, $C(1; 3)$, $D(2; -3)$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. Imaginea punctului $A(7; -4)$ la o translație este punctul $A_1(1; 3)$. Aflați imaginea punctului $B(-3; 5)$. — 2

2. Calculați modulul vectorului cu originea $A(-9; 20)$ și vârful $B(3; -15)$. — 2

3. Stabiliți dacă punctele $A(12; 2)$, $B(-8; -2)$, $C(2; 0)$ sunt coliniare. — 3

4. Punctele $A(-2; 1)$, $B(1; -4)$, $C(6; -3)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$. Aflați coordonatele punctului D. — 3

Varianta 2

1. Imaginea punctului $A(-3; 6)$ la o translație este punctul $A_1(7; 2)$. Aflați imaginea punctului $B(-1; 8)$.

2. Calculați modulul vectorului cu originea $A(20; -3)$ și vârful $B(-4; 4)$.

3. Stabiliți dacă punctele $A(-2; 10)$, $B(4; -5)$, $C(2; 0)$ sunt coliniare.

4. Punctele $A(8; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(4; -1)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$. Aflați coordonatele punctului D.

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1. Recapitulare și completări

§1. **1.** De exemplu, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Z}_-$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Q}_-$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}_-$. **2.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) A; f) F; g) A; h) A. **5.** a) 1) $\approx 3{,}5$; 2) $\approx 3{,}46$; 3) $\approx 3{,}464$. **7.** a) F; b) F; c) F; d) F; e) A; f) A. **9.** a) 7,8; b) 6; d) 5,48; f) $\sqrt{22}$. **10.** $-4{,}5$; $-\sqrt{20}$; -1; $\sqrt{9}$; 3,27; $|4{,}28|$; $|-6{,}(2)|$. **12.** a) $\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{I}_-$; d) $\mathbb{Q}$; e) $\mathbb{N}$; f) $\{0\}$. **14.** a) $\sqrt{19}-4$; b) $\sqrt{10}-2$; c) $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$; d) $\sqrt{22}-3\sqrt{2}$. **15.** b) $\begin{cases}1-x, \text{ dacă } x\le 1\\ -1+x, \text{ dacă } x>1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-6, \text{ dacă } x\ge 2\\ -3x+6, \text{ dacă } x<2.\end{cases}$ **17.** 2) a) $\left\{x \,\middle|\, -1\frac{2}{5}<x<2\right\}$; c) $\{x\,|\,-6{,}5<x<\sqrt{10}\}$; e) $\{x\,|\,-2<x<5\}$; f) $\{x\,|\,x<\sqrt{2}$ sau $x>\sqrt{5}\}$. **19.** 28. **20.** *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. **22.** a) „=”; b) „>”; c) „=”; d) „<”. **24.** 18.

§2. **2.** 2) 350; 5) 642; 14,4; 6) 0,225; 1035; 14,4. **4.** a) $D_{108}=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$; $D_{54}=\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$; c) $(108, 54)=54$; d) $[108, 54]=108$. **5.** b) $-81{,}4$. **6.** a) $\approx 21{,}26$; c) $\approx -1{,}22$; e) $\approx 6{,}93$. **7.** b) $\approx 5{,}49$. **10.** a) -1 și 0; b) 3 și 4; c) 5 și 6; d) -23 și -22. **12.** 3 761 de plăci. **13.** e) $-1+\sqrt{3}$; $-0{,}5(1+\sqrt{3})$; f) $-2-\sqrt{5}$; $-2+\sqrt{5}$. **15.** a) $[-4{,}5; \sqrt{5})$; $(0; 2)$; d) $(\sqrt{7}; 2013)$; $\{15\}$. **17.** c) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; d) $0{,}5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}$. **19.** $4{,}77888\cdot 10^{24}$ kg. **22.** a) De exemplu, $(4+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})$; d) de exemplu, $2\sqrt{15}+\sqrt{15}$; e) de exemplu, $(-1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})$. **24.** a) -10; b) 6 și respectiv 1; c) de exemplu, 2,5; d) -3. **25.** c) $[-1{,}7; 0)\cup(-1; \sqrt{7}]$; d) $[-\sqrt{11}; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{2}; \sqrt{21}]$. **26.** c) $A\cup B=\mathbb{Z}$; $A\cap B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $A\setminus B=\mathbb{Z}\setminus\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $B\setminus A=B\setminus\mathbb{Z}=[-4, 5)\setminus\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **27.** a), b) *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ și $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **28.** a), b) *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ și $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **29.** a) $S=\{1{,}5; 1; -2\sqrt{5}\}$. **31.** *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ și $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **32.** d) *Indicație*. Analizați cazurile: $a<b$, $a=b$ și $a>b$. **33.** c) $4+4+4-4:4=11$.

Probă de evaluare

Varianta 1. **1.** a) A, F, A, F; b) $-1\,993{,}6$; c) $-498{,}4$; d) $3\sqrt{3}-4$. **2.** a) 155 lei; b) în prima lună. **3.** $3{,}57\cdot 10^3$ m.

Varianta 2. **1.** A, F, A, A; b) 2 005,9; c) 501,475; d) $3-2\sqrt{2}$. **2.** a) 120 km; b) în prima oră. **3.** $195\cdot 10^7$ biți.

Capitolul 2. Puteri și radicali

§1. **4.** a) x^{12}; b) a^8; c) $64y^5$; d) a^5b^{11}. **7.** e) $\frac{25}{4}$; f) 9; g) $\frac{9}{25}$; h) $-\frac{7}{16}$. **16.** a) 12; b) $9\frac{1}{4}$; c) $5\frac{29}{64}$; d) $-7\frac{1}{12}$. **17.** a) 2; b) 4; c) 6; d) 5; e) 10; f) $\frac{1}{9}$; g) 3. **18.** a) $x^{-2}y$; b) a^4b^4; c) 1; d) $1{,}25ab^2$.

19. c) $\left(\dfrac{2y^2}{x}\right)^{-5}$; d) $(5a^{-5}b^{-1})^3$. **21.** 5,34 kg. **22.** a) x^5; b) x^4; c) x^3; d) x^{13}. **23.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{5}$. **24.** a) ab; b) $\frac{a}{b}$; c) a^3b^3; d) $\frac{a^2}{b^3}$. **26.** a) $\frac{y-x}{x^2y^2}$; b) $x+y$; c) $\frac{1+a}{1-a}$; d) $\frac{a-1}{a}$. **27.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§2. **1.** h) $3\frac{1}{3}$; i) $1\frac{2}{3}$; j) $2\frac{1}{2}$. **3.** c) 9; d) 6; e) 8; f) 110. **5.** a) $a\geq 0$; b) $a\geq -2$; c) $a\leq 1$; d) $a>1$. **6.** a) 2 şi 3; b) 4 şi 5; c) 6 şi 7; d) 12 şi 13. **8.** a) 1; b) 0; c) 5; d) 7. **10.** a) 44; b) 35; c) 7,2; d) $\frac{6}{13}$; e) $\frac{4}{45}$; f) 51; g) $\frac{1}{7}$; h) 12. **11.** a) 36; b) 60; c) 42; d) 135; e) 5; f) 15; g) 7; h) 45. **12.** a) $6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3}$; c) $5\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{10}$; e) $\sqrt{6}$; f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; g) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; h) $\sqrt{3}$. **13.** a) $\sqrt{45}$; b) $\sqrt{75}$; c) $\sqrt{28}$; d) $-\sqrt{18}$; e) $\sqrt{108}$; f) $\sqrt{3}$; g) $-\sqrt{5}$; h) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **15.** a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; c) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$; d) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$; e) $\frac{7\sqrt{2}}{9}$; f) $\frac{3\sqrt{17}}{34}$; g) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; h) $\frac{\sqrt{14}}{21}$. **16.** a) $x\in[0;+\infty)$; b) $x\in(-\infty;0)$; c) $x\in(0;+\infty)$; d) $x\in\mathbb{R}$; e) $x\in\mathbb{R}^*$; f) $x\in\varnothing$; g) $x\in[1;+\infty)$; h) $x\in\mathbb{R}$. **17.** a) 1; b) 6. **18.** a) $2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) 21; d) 16; e) $7+2\sqrt{3}$; f) 1; g) 0; h) $\sqrt{15}$. **19.** a) 2,38; b) 0,123; c) 26,32; d) 3,504. **21.** a) 1,2; b) 20; c) 40; d) 70. **22.** a) $\sqrt{11}$; b) 1; c) 3; d) $\frac{2}{19}$. **23.** a) $\sqrt{15}$; b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{2}{3}$. **24.** a) $-4ab^5\sqrt{2a}$; b) $3(a-b)^2\cdot\sqrt{3(a-b)}$; c) $-2(a-3)\cdot\sqrt{-2(a-3)}$; d) $(x-2)(5-x)^2\cdot\sqrt{(x-2)(5-x)}$. **25.** a) $-\sqrt{3a^2}$; b) $\sqrt{x^3}$; c) $-\sqrt{-y^3}$; d) $\sqrt{(a-b)^3}$; e) $-\sqrt{(y-x)^3}$; f) $-\sqrt{2(a-1)}$. **26.** a) $-\frac{a^4b^6}{c}$; b) x^2y^8; c) m^4n^7; d) $x-3$; e) $\sqrt{3}$; f) -1. **27.** a) $2(\sqrt{6}-1)$; b) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$; c) $2\sqrt{5}+1$; d) $2\sqrt{2}-3$; e) $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$; f) $3+\sqrt{6}$. **28.** $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}<2\sqrt{2013}$. **29.** a) 4; b) $2\sqrt{5}$. **30.** a) $\sqrt{6}-1$; b) $2+\sqrt{3}$. **31.** a) $2+\sqrt{3}$; b) $(\sqrt{5}+\sqrt{7-\sqrt{2}})(-1-\sqrt{2})$; c) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$. **32.** a) $\sqrt{5}-1$; b) 9.

Exerciții și probleme recapitulative

2. a) a^{-14}; b) x^3. **4.** a) 180; b) 24; c) 2,6; d) 21; e) 2; f) 3. **5.** a) $9\sqrt{5}$; b) $7-4\sqrt{3}$; c) 1; d) $11-22\sqrt{2}$. **6.** a) $-6xy\sqrt{y}$; b) $\frac{a^3}{5b}$; c) $-\frac{1}{2}\sqrt{x}$. **9.** $x\in(-\infty;0)$; $y\in(-\infty;0)$. **10.** $a=0$ şi $b\in[0;+\infty)$ sau $b=0$ şi $a\in[0;+\infty)$. **11.** a) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; b) $\frac{2\sqrt{b}}{b}$. **12.** a) $\frac{2b^2+a}{a^2b^4}$; b) $\frac{a^4}{1+2a^2+a^4}$. **13.** 1. **14.** a) 0; b) 0. **15.** 2.

Capitolul 3. Calcul algebric

§1. **3.** a) $9{,}5\sqrt{7}+12\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; b) $\sqrt{15}+16\sqrt{2}$. **4.** a) $5{,}7x+29y-2$; b) $-\frac{17{,}8}{4}a+\frac{13}{5}b+\sqrt{7}$; c) $4\sqrt{3}t-7{,}(2)z-\sqrt{7}tz$; d) $-1+6ab^2-100ab$. **5.** a) $4{,}12x^2y=4x^2y+0{,}12x^2y$; b) $-3\sqrt{2}tz=-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz$; c) $6{,}(15)ab=6ab+0{,}(15)ab=6ab+\frac{5}{33}ab$; d) $-\frac{2}{7}xy^2=-\frac{1}{7}xy^2-\frac{1}{7}xy^2$. **6.** a) $(-21)x^3y^4z^4$; b) $14a^4b^2$; c) $-a^4x^2y$; d) $-30t^3z^4$. **7.** a) $13xy^{-1}$; b) $\left(-\frac{1}{3}\right)a^{-1}b^2$; c) $-\sqrt{3}tz$; d) $4{,}6a^{-1}t$. **8.** a) $9x^2y^4$; b) $25a^8b^4$; c) $\dfrac{1}{-\frac{1331}{125}t^3z^3}$. **9.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) F; f) F; g) A; h) F.

10. a) m^2+mn; b) z^2-zy; c) $3ab-6ac$; d) $-2\sqrt{2}x+2y$; e) $1{,}7x^2+5{,}1xy$; f) $\sqrt{14}a+7$. **11.** a) $(-12)x^3y^6+32x^2y^2z$; b) $-65a^3b^4+130a^2b^2c$; c) $-\sqrt{98}t^2z+\sqrt{147}t^3z^3$; d) $12a^3b^3-10a^2b$. **12.** a) 9 cm^2; b) 19 cm^2. **13.** a) $10x^2-21y^2-1xy-2x+3y$; b) a^3-b^3; c) a^3+b^3; d) $x^3+x^2y-y^2x-y^3$; e) a^3+8; f) x^3+1. **14.** a) $7ab(b+2a)$; b) $0{,}8xy(-4{,}5xy^2+x^3y^4)$; c) $\sqrt{17}xy(2y^3-x)$; d) $tz(-15z-\sqrt{5}t)$; e) $(x-5)(3-y)$; f) $(a-1)(2{,}5a+1)$.

16. a) $7x^2y-3\sqrt{7}x^2+2\sqrt{7}xy-xy+y^2-7x^2y^2$; b) $\dfrac{5x^4y-245+x^6y^2-x^4y^6}{7}$; c) $99a^2-175b^2$; d) $-x^6-3x^3+9+27x^{-3}$. **17.** a) $-\dfrac{3}{49}a^2x^3y^3$; b) $\dfrac{7}{4}ax^2y^{-2}$; c) $\sqrt{6}a^{-2}bc^4$; d) $\dfrac{50}{9}t^{-4}z^8$. **19.** a) $-6a$; b) $-100x$. **21.** Al doilea şahist. **22.** a) $x\cdot x\cdot(x^2-0{,}7x-x+0{,}7)$. **23.** $2\sqrt{3}$. **24.** a) 5; b) –2; c) 0; d) 1. **25.** a) F; b) A. **27.** a) 1260; b) 168; c) 1584. **28.** a) 3,5 km; b) 7 km; c) 10,5 km; d) 14 km. **32.** a) $S=\{0;4\}$; b) $S=\{0;1\}$. **34.** $\sqrt{a+1}-1$.

§2. **4.** a) F; b) F; c) A; d) F; e) A; f) A; g) F; h) F; i) A. **5.** a) $(\sqrt{3}+2x)^2=3+4\sqrt{3}x+4x^2$; b) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=6{,}25x^2+2\cdot2{,}5x\cdot\sqrt{2}y+2y^2$; c) $(a^2-2b^3)^2=a^4-4\cdot a^2\cdot b^3+4b^6$; d) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=t^4-2\cdot t^2\cdot\sqrt{3}z^4+3z^8$. **6.** a) $(x-\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; b) $(-x-\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; c) $(-x+\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; d) $(x+\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; e) $(\sqrt{11}-x)^2=11-2\sqrt{11}x+x^2$; f) $(\sqrt{11}+x)^2=11+2\sqrt{11}x+x^2$.

8. a) A; b) F; c) F; d) A; e) F; f) A. **15.** a) 10; b) $8\sqrt{10}+18$; c) $-24-\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$; d) $1{,}4\sqrt{11}+11{,}49$. **18.** a) $(120+40\sqrt{5})\text{ cm}^2$; b) $(24+6\sqrt{15})\text{ cm}^2$; c) $(645-100\sqrt{5})\text{ cm}^2$; d) $(10\,200-1\,000\sqrt{8})\text{ cm}^2$. **19.** a) 44 cm^2; b) 90 cm^2. **31.** b) 0, 1 sau 4. **32.** a) $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; c) $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$. **35.** a) $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; b) $\dfrac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$. **41.** a) 2; b) 2.

§3. **1.** a) $(x-5)^2$; b) $(4a-1)^2$; c) $(6ab+1)^2$; d) $(x+8)^2$; e) $(8xy-1)^2$; f) $(1+9x)^2$. **2.** a) A; b) A; c) F; d) F. **4.** a) $(1+x)^3$; b) $(b+4)^3$; c) $(10+t)^3$; d) $(x+2y)^3$. **5.** a) $13(2xy-3z)$; b) $-11xy(11x-y)$; c) $2{,}5a^3b^2(5-a)$; d) $\sqrt{2}t(2t-5)$. **6.** a) $a^3(6+a^2b)(36-6a^2b+a^4b^2)$; b) $x^6(5+x^2y)(25-5x^2y+x^4y^2)$; c) $t^3(3+z)(9-3z+z^2)$. **7.** a) $a^3(b-a)(b^2+ab+a^2)$; b) $t^3(t^4-2z)(t^8+2zt^4+4z^2)$; c) $(xy)^3(x-y)(x^2+xy+y^2)$. **8.** a) $(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})(a+\sqrt{5})$; b) $(xy-2)(3x-y)$. **9.** a) $4tz$; b) $a(a-b)(a+b)$; c) $(x^2+5)(x+6)(x-1)$; d) $(x-y)^2(x+y)^2$. **10.** a) $(x-3)(x-1)$; b) $(x+6)(x+4)$; c) $a(a-2b-3)$; d) $a^2(b-2)(b-3)$. **13.** 5. **14.** a) $13=7^2-6^2$. **15.** a) 0; b) 4; c) 0; d) –5. **17.** a) $x^{-3}(3-4x^{-1}y)(9+12y+16x^{-2}y^2)$; b) $t^3(8t^3+0{,}1z^2)(64t^6-0{,}8t^3z^2+0{,}01z^4)$; c) $(1+5ab^5)(1-5ab^5+25a^2b^{10})$.

18. a) $t^3z^{-9}(2t^2z-1)(4t^6z^2+2t^3z+1)$; b) $a^{15}(9a^2b^3-0{,}2)(81a^4b^6+1{,}8a^2b^3-0{,}04)$; c) $x^3\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{2y^8}{3}\right)\left(\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{xy^8}{6}+\dfrac{4y^{16}}{9}\right)$. **19.** 11,12. **22.** a) $(t^2+t+1)^2$; b) $(x^2+3x+1)^2$.

§4. **6.** a) $\dfrac{10}{3}$; b) –5,25. **7.** a) 1; b) $\dfrac{1}{a-1}$; c) $\dfrac{8}{3-2p}$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. a) $7{,}5xy+25$; b) $14{,}75a^2b^3-3{,}6ab-0{,}7$; c) $-5a^2-28a-15$; d) $10{,}96x^2-24{,}4xy+29y^2$. **2.** a) A; b) F; c) F; d) A. **4.** a) 1; b) 8. **5.** a) $(x+5)(x-5)$; b) $(2+9t)(2-9t)$; c) $(2+a)(4-2a+a^2)$; d) $(c+2x)(c^2-2xc+4x^2)$; e) $\left(\frac{1}{3}+x^{-1}\right)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}x^{-1}+x^{-2}\right)$; f) $-(c+3x)(c^2-3xc+9x^2)$; g) $(0{,}2+yz^3)(0{,}04-0{,}2yz^3+y^2z^6)$; h) $(5m^{-1}-n^{-2})(25m^{-2}+5m^{-1}n^{-2}+n^{-4})$. **6.** a) a^9-1; b) m^3-1; c) a^6+1; d) $8a^3+27b^3$. **7.** a) $\frac{a-4}{2}$; b) $\frac{a+3}{5}$. **8.** a) $S=\left\{-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right\}$; b) $S=\{-8;\ 8\}$; c) $S=\{-0{,}6;\ 0{,}6\}$; d) $S=\{-10;\ 10\}$. **15.** a) $(a-b)(1-a-b)$; b) $(x+y)(x-y-1)$; c) $(x+y)(1-x^2+xy-y^2)$; d) $(a-b)(a^2+ab+b^2-1)$. **16.** a) $\frac{(x-1)^2}{x^3+1}$; b) $-\frac{x-1}{x^2+x+1}$. **17.** a) $(3x-1)(21x^2-6x+1)$; b) $\left(\frac{1}{4}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$; c) $-z(z+2)(z^4+4z^3+4z^2+6z+3)$. **20.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(\sqrt{3})^2$. **21.** $12\,098^3$.

Capitolul 4. Ecuații și inecuații. Sisteme

§1. **5.** a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\{5\}$; c) $S=\{5\}$; d) $S=\{10{,}5\}$; e) $S=\left\{\frac{1}{8}\right\}$; f) $S=\varnothing$. **6.** a) $S=\{2\sqrt{3}\}$; b) $S=\varnothing$. **7.** a) $S=\{1{,}2\}$; b) $S=\varnothing$. **8.** a) $x=10$; b) $x=3$; c) $x=35$. **11.** $x=7$. **12.** $y=3$. **13.** a) $S=\{5\}$; b) $S=\{2{,}5\}$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{-3\}$; e) $S=\{1\}$; f) $S=\{5\}$; g) $S=\{\sqrt{5}+\sqrt{3}\}$; h) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **16.** a) $S=\{-4;\ 4\}$; b) $S=\{-5;\ 5\}$; c) $S=\{-7;\ 7\}$; d) $S=\{-3;\ 3\}$; e) $S=\{3\}$; f) $S=\varnothing$. **17.** 2 kg. **18.** 4 km/h. **19.** a) $a=-0{,}04$; b) $a=3$; c) $a=0$; d) $a=1$. **20.** $a=23$. **21.** a) $S=\{-2;\ 5\}$; b) $S=\{3;\ 4\}$; c) $S=\left\{\frac{2}{3};\ 2\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}$; e) $S=\varnothing$; f) $S=[11;\ +\infty)$. **22.** a) $S=\{-m\}$; b) $S=\varnothing$ pentru $m=0$, $S=\left\{\frac{5}{m}\right\}$ pentru $m\neq 0$; c) $S=\mathbb{R}$ pentru $m=0$, $S=\{2\}$ pentru $m\neq 0$; d) $S=\varnothing$ pentru $m=2$, $S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$ pentru $m\neq 2$; e) $S=\mathbb{R}$ pentru $m=0$, $S=\{-3\}$ pentru $m\neq 0$; f) $S=\mathbb{R}$ pentru $m=-1$, $S=\{m-1\}$ pentru $m\neq -1$. **23.** 16 km/h, 20 km/h; 12 km. **24.** 350 de lei.

§2. **4.** a) $y=-2x+5$; b) $x=-0{,}5y+2{,}5$. **6.** $y=-0{,}2$. **8.** a) Nu; b) nu; c) da; d) nu. **9.** a) $S=\{(4;\ 2)\}$; b) $S=\{(0;\ 4)\}$; c) $S=\{(4;\ 2)\}$; d) $S=\{(5;\ 1)\}$. **10.** a) $S=\{(2;\ 9)\}$; b) $S=\{(1;\ 3)\}$; c) $S=\{(2;\ 7)\}$; d) $S=\{(5;\ 2)\}$. **11.** a) $S=\{(3;\ 7)\}$; b) $S=\{(2;\ 5)\}$; c) $S=\{(2;\ 0)\}$; d) $S=\varnothing$. **13.** $b=3$. **14.** $a=3$. **17.** a) $S=\{(3;\ 2)\}$; b) $S=\{(6;\ 1)\}$; c) $S=\{(0{,}2;\ 0{,}4)\}$; d) $S=\{(6;\ 12)\}$. **19.** 1,6 kg de orez; 2,4 kg de mei. **20.** 35 de ani; 9 ani. **21.** 6 camere cu 2 paturi; 10 camere cu 3 paturi. **22.** Câte 600 de lei. **23.** 8 milioane de lei; 5 milioane de lei. **24.** a) $S=\{(2;\ 3)\}$; b) $S=\{(-2;\ 4)\}$; c) $S=\{(3;\ -7)\}$. **26.** a) $x+y-2=0$; b) $4x-y=0$. **27.** a) $m=3$; b) $m=-3$. **28.** a) $a=-3$; b) $a=\pm 12$. **29.** Porțiunea BC – 24 de automobile; porțiunea BD – 12 automobile; porțiunea DE – 14 automobile; porțiunea CE – 22 de automobile. **30.** a) 8 milioane de lei; 5 milioane de lei; b) 14 milioane de lei; 12 milioane de lei. **31.** 10 l cu concentrația de 20%; 20 l cu concentrația de 50%.

§3. **4.** a) $\{-1; 0\}$; b) $\{1; 2; 3; 4\}$; c) $\{2; 3\}$. **7.** a) $S=[3; +\infty)$; b) $S=(-\infty; 10)$; c) $S=\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right]$; d) $S=[-9; +\infty)$. **9.** a) $S=(-\infty; -3)$; b) $S=\left[-\frac{6}{11}; +\infty\right)$; c) $S=\left(-\infty; -\frac{5}{9}\right]$; d) $S=\varnothing$; e) $S=(3; 6]$. **13.** a) $S=\left[1\frac{5}{24}; +\infty\right)$; b) $S=\left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$; c) $S=\left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **14.** a) $x\in\left(-\infty; -\frac{13}{15}\right]$; b) $x\in(-\infty; 1{,}2)$. **15.** a) $y\in\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; b) $y\in\left(-\infty; 72\frac{2}{3}\right]$; c) $y\in\left[-119\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **16.** 0. **17.** a) $x\in[1{,}6; +\infty)$; b) $x\in(3{,}75; +\infty)$. **18.** a) $S=\varnothing$; b) $S=(-24; -1)$; c) $S=\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; d) $S=\left(-\frac{1}{5}; 5\right)$. **19.** a) $x\in\varnothing$; b) $x\in\left[-4; \frac{1}{4}\right)$. **20.** a) $a\in(-\infty; 0)$; b) $a\in(0; +\infty)$; c) $a\in(0; +\infty)$; d) $a\in(-\infty; 0)$. **21.** a) $5\pi < l < 5{,}2\pi$; b) $2{,}5\pi < l < 2{,}6\pi$. **24.** a) $S=(-\infty; 4]$; b) $S=(-\infty; -3)$; c) $S=(-\infty; 1{,}6)$. **25.** 1) $a\in(2; +\infty)$; 2) $a=2$; 3) $a\in(-\infty; 2)$; 4) $a\in\varnothing$. **26.** a) $S=[-2; -1)$; b) $S=(-\infty; -3)\cup(3; 4]$; c) $S=[-7; -5)\cup(5; 7]$. **27.** Mai mult de 21 l, dar mai puțin de 28,75 l. *Indicație*. Pentru a afla temperatura amestecului, folosiți formula mediei ponderate: $t=\frac{v_1\cdot t_1+v_2\cdot t_2}{v_1+v_2}$.

§4. **6.** a) $S=\{-2; 2\}$; b) $S=\{0; 25\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{0\}$; e) $S=\{0; -1\}$; f) $S=\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; g) $S=\{0; 3\}$; h) $S=\left\{0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; i) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **7.** a) $\Delta=121$, $S=\{-2; 9\}$; b) $\Delta=1$, $S=\left\{1; \frac{2}{3}\right\}$; c) $\Delta=1$, $S=\left\{1\frac{2}{3}; 2\right\}$; d) $\Delta=0$, $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) $\Delta=-11$, $S=\varnothing$; f) $\Delta=16$, $S=\{-1; 3\}$; g) $\Delta=25$, $S=\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$; h) $\Delta=0$, $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$; i) $\Delta=53$, $S=\left\{\frac{-7-\sqrt{53}}{2}; \frac{-7+\sqrt{53}}{2}\right\}$. **9.** a) $x\approx-0{,}2$ sau $x\approx 6{,}2$; b) $x\approx-3{,}7$ sau $x\approx-0{,}3$; c) $x\approx-0{,}7$ sau $x\approx 2{,}7$. **10.** a) $S=\left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$; b) $S=\{-1; 2\}$; c) $S=\left\{0; 4\frac{1}{4}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{-8-\sqrt{73}}{3}; \frac{-8+\sqrt{73}}{3}\right\}$; e) $S=\{10-4\sqrt{10}; 10+4\sqrt{10}\}$; f) $S=\left\{\frac{1}{6}; 1\right\}$. **11.** a) $x=3$; b) $x=10$. **14.** h) $S=\{-\sqrt{3}; 5\}$; i) $S=\{3-\sqrt{15}; 5\}$. **15.** a) $(x-7)(x-3)$; b) $(2x-3)(3x-1)$; c) $(x+3)(3x-2)$; d) $(-2x-1)(x-2)$; e) nu e posibil; f) $2\left(x+1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$. **16.** a) $\frac{x+1}{5x+1}$; b) $\frac{x+1}{x}$; c) $\frac{x-1}{x-4}$. **17.** 1 s și 3 s. **18.** 30 u.l. **19.** a) $S=\{-1; 1\}$; b) $S=\{-1; 1\}$; c) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; d) $S=\left\{-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right\}$. **20.** a) $m=2$, $x_2=3$; b) $m=-27$, $x_2=-\frac{9}{2}$. **21.** a) $m=\pm 6$;

b) $m=0,\ m=\frac{4}{9}$; c) $m=\frac{1}{2}$; d) $m=20\pm6\sqrt{5}$. **23.** a) $S=\{-1\}$; b) $S=\{-3;3\}$; c) $S=\{-5;5\}$; d) $S=\{-3\sqrt{7};7\}$. **24.** a) 169; b) $\frac{13}{14}$; c) 141; d) 113. **25.** a) $a=-12$; b) $a=3$.

Exerciții și probleme recapitulative

2. a) $S=\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=(2;-1)$. **3.** a) $S=[2;+\infty)$; b) $S=(-\infty;1)$. **4.** a) $S=(2;5)$; b) $S=(-\infty;2)$; c) $S=\varnothing$. **6.** a) $S=\left\{-2;\frac{3}{2}\right\}$; b) $S=\left\{-2;\frac{2}{3}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; d) $S=\left\{0;\frac{7}{2}\right\}$; e) $S=\{-6;5\}$; f) $S=\{-4;5\}$. **9.** a) $S=(-2;6)$; b) $S=(3;2)$. **10.** a) $S=(2;1)$; b) $S=(2;1)$. **11.** 18. **13.** $S=(-\infty;0{,}9]$. **14.** a) $S=[-1{,}5;2]$; b) $S=\left[\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$. **15.** $x\in[-2{,}8;5)$. **16.** a) $S=\{-5;3\}$; b) $S=\{-2;4\}$; c) $S=\left\{1;\frac{5}{3}\right\}$; d) $S=\{-2;3{,}2\}$. **18.** a) $-1{,}006$; b) $-\frac{100}{103}$. **19.** $m=-\frac{1}{3}$. **20.** Smântână – 210 g, făină – 390 g, zahăr – 170 g, unt – 30 g. **21.** 11 km. **22.** Nu mai puțin de $\frac{2}{3}$ kg şi nu mai mult de $2\frac{4}{5}$ kg. **23.** 10 echipe. **24.** a) $a\in\left(3\frac{1}{8};+\infty\right)$; b) $a\in\left\{-\frac{1}{7};0;1\right\}$.

Capitolul 5. Funcții. Șiruri

§1. **2.** b) $\{2\}$; c) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. **3.** $s(t)=80t$. **4.** $A(x)=8x$. **5.** b) 2) $D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=[0,+\infty)$. **7.** a) $A(2;3)$, $B(-1;4)$, $C(4;0)$, $D(3;-1)$, $E(-2;-2)$. **9.** b) 1) a) ±2; b) $\sqrt{2}$; c) ±3. **10.** 1) a) $A\notin G_f$; 2) a) $O\in G_f$; 3) a) $B\notin G_f$. **13.** a) $E(f)=\left\{-\frac{3}{4};-1;-\frac{3}{2};-3;3;\frac{3}{2};1;\frac{3}{4}\right\}$. **14.** b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; d) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **18.** a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2;6\}$; b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **19.** a) -2; b) 2.

§2. **1.** a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2{,}5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-1$. **3.** a) 2; b) -1; c) $-1{,}5$; d) 0; e) 0; f) 10. **4.** c) II şi IV; d) I şi III. **5.** a) $\frac{1}{10}$; b) $-\sqrt{3}$; c) 2,1; d) $0{,}5\sqrt{2}$. **6.** a) Nu; b) da; c) nu; d) da. **8.** a) Ascuțit; b) obtuz; c) ascuțit; d) obtuz. **9.** Defineşte o funcție, dar nu este o funcție de gradul I. **10.** Este o proporționalitate directă. **12.** a) $R(x)=50-4{,}5x$; b) $D(R)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. **13.** a) 1) $\frac{1}{5}$; 3) $f(x)>0$ pentru $x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)$; $f(x)<0$ pentru $x\in\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$; 4) ascuțit; 5) nu este strict crescătoare. **14.** b) 1) 0; 3) $g(x)>0$ pentru $x\in(-\infty;0)$; $g(x)<0$ pentru $x\in(0;+\infty)$; 4) obtuz; 5) nu este strict crescătoare. **15.** a) $f(x)=-1{,}5x+3$. **16.** b) $f(x)=-0{,}2x$. **19.** $f(x)=x+4$.

§3. **1.** $f(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=\frac{5}{x}$; $f(x)=-\frac{7}{x}$. **4.** a) F; b) A; c) F; d) F; e) F; f) A. **5.** a) II şi IV; b) I şi II. **6.** b) 1) Descrescătoare; 2) $f(x)>0$ pentru $x\in(-\infty;0)$; $f(x)<0$ pentru $x\in(0;+\infty)$; 3) II şi III. **8.** a) Nu; b) da; c) da; d) nu. **10.** a) $f(x)=-\frac{36}{x}$; b) $f(x)=\frac{32}{x}$.

§4. **1.** $x \in \left\{2{,}25; \frac{100}{9}; 25; 49; 8{,}91\right\}$. **3.** a) F; b) A; c) F; d) F; e) A. **4.** a) Da; b) da; c) da; d) nu. **6.** a) 7; b) 0,2; c) 11; d) 25. **7.** $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99\}$. **11.** a) $S = \{4\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \varnothing$.

§5. **1.** 1, 3, 5, 7, 9. **2.** 0, 3, 6, 9, 12. **3.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$. **4.** a) 2, –1, –4, –7, –10; b) 0, 2, 6, 12, 20; c) 1, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{3}$; d) –3, +3, –3, +3, –3. **5.** a) x_{n-1}, x_n; b) x_{n+2}, x_{n+3}. **6.** $c_3 = \frac{3}{4}$, $c_7 = \frac{3}{8}$, $c_{100} = \frac{3}{101}$. **8.** 2, 7, 22, 67, 202. **9.** a) 7, 15, 27, 35, 39. **10.** a) –2, +2, –2, +2, –2; b) 0, –1, –2, –3, –4. **11.** b) $b_3 = \frac{8}{7}$, $b_7 = \frac{64}{7}$, $b_{12} = \frac{2^9}{3}$. **12.** c). **13.** a) Da; b) da; c) nu. **14.** 4 termeni negativi. **15.** c) 1, 1, 2, 3, 5; d) 3, 1, –3, –11, –27. **19.** a) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. **20.** $c_n = (2n-1)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. **22.** Da.

Exerciții și probleme recapitulative

2. b). **5.** b) $f(1) = f(-2) = f(5) = f(10) = 2{,}(3)$; d) $f(1) = 1$; $f(-2)$ nu există; $f(5) = \sqrt{5}$; $f(0{,}1) = \sqrt{0{,}1}$. **6.** a) A; b) F; c) F; d) F. **7.** a) $D(f) = \mathbb{R}_+$; b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; c) $D(f) = \mathbb{R}$; d) $D(f) = [2, +\infty)$; e) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; f) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. **8.** a) 12; b) –5; c) $-\frac{8}{11}$; d) 10 000. **9.** 2, 1, 4, 2, 8. **10.** a) –1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. **11.** 17. **13.** $m = 4n$. a) 400; b) $D(f) = \mathbb{N}$, $E(f) = \{0, 4, 8, 16, 32, ...\}$. **17.** a) 1) De exemplu, 2; 2) de exemplu, –3; b) 1) de exemplu, $\sqrt{2}$; 2) de exemplu, –1,2; c) 1) de exemplu, 5; 2) de exemplu, –8; f) 1) de exemplu, –2; 2) de exemplu, 7. **19.** a) 1) De exemplu, 3; 2) de exemplu, –5; d) 1) de exemplu, –3; 2) de exemplu, 5. **20.** a) 5; b) 10; c) 12. **21.** a) $x = y = \frac{1}{4}$; b) nu are; c) $x = y = 0$; d) $x = y = -\sqrt{5}$. **23.** $x_9 = -45$. **24.** Începând cu rangul 21. **25.** a) 64; b) 6. **26.** Nu aparține. **28.** a) $f(f(-2)) = 20$; $f(f(f(0))) = 7$; b) $x = 0{,}25$.

Capitolul 6. Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică

§1. **3.** a) Aleator; b) aleator; c) imposibil; d) imposibil; e) sigur; f) imposibil. **4.** a) A e mai posibil decât B; b) A e mai puțin posibil decât B; c) A e mai puțin posibil decât B. **5.** Unghiuri, triunghi. **9.** a) 15 bile; b) 18 bile; c) 19 bile; d) 11 bile; e) 19 bile.

§2. **1.** a) O şansă din şase; c) nicio şansă. **2.** 0,5. **3.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{5}{6}$; e) 0. **4.** $\frac{1}{15}$. **5.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{6}$. **7.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{11}{20}$. **9.** *Indicație.* Se vor număra numerele prime (pare, impare) dintre cele 90 de numere naturale. **11.** $\frac{13}{18}$. **12.** $P(b) = \frac{14}{31}$; $P(f) = \frac{17}{31}$. **14.** $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$. **15.** $P = \frac{2}{25}$.

Exerciții și probleme recapitulative

3. $P(v) = \frac{1}{3}$; $P(r) = \frac{2}{3}$. **4.** O față galbenă şi cinci fețe roşii. **6.** b) $\frac{2}{25}$. **7.** 0,98. **8.** $\frac{1}{9}$. **9.** 0,1. **10.** 13 mere. **12.** Urna b.

Geometrie

Capitolul 1. Recapitulare și completări

§1. **3.** a) 24 dm = 240 cm; b) 890 mm = 8,9 dm; c) 7,5 m = 750 cm; d) 64900 cm = 0,649 km. **4.** 44°, 136°, 136°. **5.** a) 90°, 90°; b) 40°, 50°; c) 18°, 162°; d) 50°, 50°. **6.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{7}$. **7.** a) $\beta = 155°$. **8.** a) Da; b) nu; c) da. **10.** a) 62 cm; b) $24\sqrt{5}$ cm. **11.** a) 2; b) 1; c) 0; d) 0. **13.** a) $\alpha = 54°$; b) $\alpha = 55°30'$. **14.** 20°, 40°, 120°. **23.** a) $PM = 12$ cm, $PN = 15$ cm. **24.** a) 20π cm; b) 10π cm; c) 24π cm; d) 4π cm. **25.** De 10 ori. **26.** $18\sqrt{3}$ cm. **27.** a) 60°, 60°, 120°, 120°; b) 6 unghiuri de 60°. **28.** 36 cm². **29.** 80 cm. **31.** 15 cm.

§2. **2.** a) F; b) A; c) A; d) F. **7.** a) De exemplu, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{27} \notin \mathbb{Q}$, însă $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9 \in \mathbb{Q}$. **15.** Adevăr. **16.** *Această pagină conține exact nouă propoziții false.* **17.** *Numele tău este Adi?*

Capitolul 2. Patrulatere

§1. **3.** a) 2; b) 3; c) 4; d) 7. **4.** a) 720; b) 900°; c) 1080°; d) 1440°. **5.** a) 27,(4) cm; b) $35\sqrt{3}$ cm. **6.** a) 120°, 80°; b) 70°, 90°. **7.** a) 90° fiecare; b) 108° fiecare; c) 120° fiecare; d) 144° fiecare. **8.** Paralele **9.** 11 cm, 12 cm, 13 cm, 14 cm. **10.** a) Da; b) nu; c) nu. **11.** a) 48°, 72°, 96°, 144°; b) 40°, 60°, 120°, 140°; c) 60°, 80°, 100°, 120°. **12.** a) 162°, 108°, 54°, 36°; b) 180°, 90°, 60°, 30°. **13.** a) 5; b) 9; c) 14; d) 35.

§2. **2.** a) 16 cm; b) $30\sqrt{5}$ cm. **3.** a) 32,8 cm; b) 30,(6) cm. **5.** a) Adevărat; b) Adevărat; c) Fals; d) Fals. **6.** 35°, 145°, 145°. **7.** 30°, 30°, 150°, 150°. **8.** 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** 5 cm. **10.** 6 cm. **11.** 22 cm, 24 cm, 26 cm, 28 cm. **12.** 90 cm. **13.** 4,5 cm. **14.** 15 cm, 20 cm. **15.** 48 cm². **16.** a) $D(6; -2)$; b) $D(5; -8)$; c) $D(1; -4)$.

§3. **2.** a) 90°, 90°, 70°, 110; b) 90°, 90°, 40°, 140°. **3.** a) 80°, 80°, 100°, 100°; b) 110°, 110, 70°, 70°. **4.** a) 6 cm; b) $4\sqrt{7}$ cm; c) 7,8(3) cm. **5.** a) 14 cm; b) 10 cm. **6.** 20 cm, 20 cm, 20 cm, 40 cm. **7.** a) 64 cm; b) 74 cm. **8.** a) 41 cm; b) $7\sqrt{5}$ cm. **9.** 20 cm. **10.** 12 cm şi 18 cm. **11.** 51 cm. **12.** 60°, 60°, 120°, 120°. **14.** 14 cm.

Exerciții și probleme recapitulative

2. a) 5; b) 6; c) 9; d) 15. **3.** a) 9; b) 12; c) 20; d) 17. **4.** a) 105°; b) 80°. **7.** a) $4\sqrt{2}$ cm; b) 80 cm². **8.** $A_2B_2 = 14$ cm, $A_3B_3 = 17$ cm. **9.** a) $A(-4; -6)$; $B(-3; 2)$; b) $C(-1; -1)$; $D(-5; 1)$. **10.** 96 cm². **11.** 60 cm². **12.** a) 50 cm²; b) 48 cm². **13.** a) 360°; b) 360°; c) 360°. **14.** Paralelogram.

Capitolul 3. Asemănarea triunghiurilor

§1. **1.** a) Nu; b) da; c) nu; d) da. **2.** a) Da; b) da.

3. a)

4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

; b)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

. **6.** a) $\frac{AB}{CD} = 0,(5)$; b) $\frac{AC}{AD} = \frac{4}{7}$; c) $\frac{BC}{BD} = 0,4375$; d) $\frac{AD}{AB} = 4,2$. **7.** a) 2,(3); b) $\frac{4}{7}$; c) 1,75; d) 0,3. **8.** a) 9,6 cm; b) 5 cm; c) 0,(3).

10. x = 2 cm, y = 4 cm, z = 6 cm; $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. **11.** x = 3 cm, y = 6 cm, z = 4,5 cm; $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

12. a) $C(4;3)$, $D(7;5)$; b) $O(0;0)$, $C(3;-1)$. **13.** a) Nu; b) da. **14.** a) 3,04; b) 6,4; c) 2,88. **16.** a) $AC=BD=1{,}25$ cm, $CD=2{,}5$ cm; b) $AC=CD=BD=2{,}(6)$ cm. **17.** a) 4,5; b) 9,3.

§2. **2.** a) $\Delta ABC \sim \Delta CDE$; b) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. **3.** a) $\Delta AFE \sim \Delta DFB$; b) $\Delta ABF \sim \Delta DEF$, $\Delta BCD \sim \Delta BED$. **4.** a) $m(\angle A)=55°$, $m(\angle C)=35°$; b) $m(\angle A)=m(\angle B)=70°$, $m(\angle C)=40°$; c) $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)=60°$. **5.** a) Adevărat; b) Fals; c) Adevărat. **6.** a) 33 cm; b) $\sqrt{5}$. **7.** $\Delta AOD \sim \Delta COB$. **8.** $\Delta BMC \sim \Delta ENF$, $\Delta AMB \sim \Delta DNE$. **9.** $\Delta ABC \sim \Delta EDC \sim \Delta DBA \sim \Delta EAD$. **10.** a) 4; b) 7. **11.** a) 67,5 m; b) 80 m. **12.** 12 cm, 16 cm, 24 cm. **13.** a) 10; b) 8. **14.** a) $\Delta AEF \sim \Delta CBD$; b) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$; c) $\Delta ADE \sim \Delta BCF$.

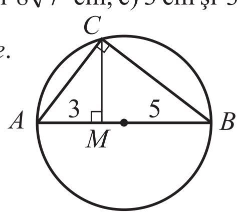
Exerciții și probleme recapitulative

3. $MM_1=10$ cm, $NN_1=20$ cm, $KK_1=30$ cm. **4.** a) O soluție este 4 cm; b) o soluție este 6 cm. **5.** $k=3$. **6.** $m(\angle BAK)=30°$, $m(\angle AKB)=74°$. **7.** 15 cm. **8.** 10 cm. **9.** $k=2$ sau $k=\frac{1}{2}$. **11.** 4 cm. **12.** 4 cm, 6 cm, 9 cm şi 6 cm, 9 cm, 13,5 cm. **13.** De 9 ori. **14.** 120°.

Capitolul 4. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

§1. **2.** a) 6 cm; b) 12 cm; c) $6\sqrt{5}$ cm. **3.** a) 12 cm; b) 8 cm; c) 12,5 cm. **4.** a) $6\sqrt{5}$ cm şi $12\sqrt{5}$ cm; b) $4\sqrt{21}$ cm şi $8\sqrt{7}$ cm; c) 3 cm şi $3\sqrt{2}$ cm. **5.** 50 cm şi 72 cm. **6.** 18 cm şi 98 cm.

7. a) *Indicație.*



ΔABC – dreptunghic,
$AM=3$ cm,
$MB=5$ cm,
$CM=\sqrt{15}$ cm.

10. $5\sqrt{2}$ cm. **11.** 12 cm. **12.** 8 cm. **13.** a) 4,5 cm; b) 4,5 cm. **14.** $6\sqrt{5}$ cm, $12\sqrt{5}$ cm.

§2. **1.** a) 26 cm; b) 25 cm; c) 8 cm; d) 6 cm. **2.** 34 cm. **3.** $\sqrt{7}$ cm. **4.** 20 cm. **5.** a) $5\sqrt{58}$ cm; b) 74 cm. **6.** a) $5\sqrt{3}$ cm; b) 18 cm. **7.** a) 13; b) $\sqrt{10}$; c) $6\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{5}$. **8.** a) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm; b) 2 cm. **9.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **10.** 208 cm. **11.** 34 cm. **12.** $\sqrt{7}$ cm. **13.** 50 cm. **15.** 40 cm.

§3. **1.** a) $\sin\alpha=0{,}8$, $\cos\alpha=0{,}6$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; b) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}\alpha=2{,}4$; c) $\sin\alpha=\frac{10}{\sqrt{149}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{149}}$, $\mathrm{tg}\alpha=1\frac{3}{7}$, $\mathrm{ctg}\alpha=0{,}7$; d) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha=0{,}75$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{7}$. **2.** a) $AC=13$, $AB=12$; b) $MK=14$, $MN=7\sqrt{3}$; c) $FG=1{,}8$, $EG=\frac{9\sqrt{26}}{5}$; d) $QR=8$, $PR=4\sqrt{13}$. **7.** a) 60°; b) 60°. **9.** a) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\sin^2 C+\cos^2 C=1$; b) $\frac{\sin A}{\cos A}=\mathrm{tg}A=0{,}75$, $\frac{\sin C}{\cos C}=\mathrm{tg}C=1{,}(3)$; c) $\frac{\cos A}{\sin A}=\mathrm{ctg}A=1{,}(3)$, $\frac{\cos C}{\sin C}=\mathrm{ctg}C=0{,}75$; d) $\frac{1}{\cos^2 A}=1+\mathrm{tg}^2 A=1{,}5625$, $\frac{1}{\cos^2 C}=1+\mathrm{tg}^2 C=2{,}(7)$; e) $\frac{1}{\sin^2 A}=1+\mathrm{ctg}^2 A=2{,}(7)$, $\frac{1}{\sin^2 C}=1+\mathrm{ctg}^2 C=1{,}5625$. **10.** a) $BC=20$ cm, $AB=48$ cm, $AC=52$ cm; b) $AB=7{,}2$ cm, $BC=9{,}6$ cm, $AC=12$ cm; c) $AB=12$ cm, $BC=12{,}6$ cm, $AC=17{,}4$ cm; d) $AB=23{,}4$ cm, $BC=8{,}8$ cm, $AC=25$ cm. **11.** a) Adevărat; b) Fals; c) Adevărat; d) Adevărat. **15.** a) $\sin M=0{,}6$, $\cos M=\sin K=0{,}8$, $\mathrm{tg}M=\mathrm{ctg}K=0{,}75$, $\mathrm{ctg}M=\mathrm{tg}K=1{,}(3)$;

b) $\cos M = \sin K = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}M = \mathrm{ctg}K = \frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}M = \mathrm{tg}K = 2{,}4$, $\cos K = \frac{5}{13}$;

c) $\sin M = \cos K = \frac{5}{13}$, $\cos M = \sin K = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}M = \mathrm{ctg}K = \frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}M = 2{,}4$;

d) $\sin M = \cos M = \sin K = \cos K = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}M = \mathrm{tg}K = \mathrm{ctg}K = 1$.

16. a) $\sin 71° \approx 0{,}95$; b) $\cos 36° \approx 0{,}80$; c) $\mathrm{tg}\,65° \approx 2{,}14$; d) $\mathrm{ctg}\,50° \approx 0{,}84$. **17.** 1.

Exerciții și probleme recapitulative

1. a) F; b) D; c) $[AF]$; d) $[CD]$. **2.** a) 36 cm; b) 42 cm. **3.** a) $8\sqrt{13}$ cm și $12\sqrt{13}$ cm; b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm și 0,75 cm. **4.** 10 cm și 24 cm. **5.** 5 cm și 6 cm. **6.** $9\sqrt{3}$ cm. **7.** a) $9\sqrt{3}$ m; b) $6\sqrt{5}$ m. **8.** $3\sqrt{3}$ cm. **9.** $6\sqrt{3}$. **10.** a) 20 cm; b) 14 cm. **11.** 15 cm. **12.** $\frac{9\sqrt{11}}{5}$ cm. **13.** $2\sqrt{5}$ cm și $4\sqrt{5}$ cm. **14.** $BD = 4\sqrt{5}$ cm, $DC = 2\sqrt{29}$ cm. **15.** 12. **16.** Cazul 1: 30 cm, $30\sqrt{3}$ cm; cazul 2: $60+30\sqrt{3}$ cm și $90+60\sqrt{3}$ cm; cazul 3: $60-30\sqrt{3}$ cm și $90-60\sqrt{3}$ cm. **17.** 20.

Capitolul 5. Vectori în plan

§1. **1.** a) $A_1(-2; 7)$, $B_1(-5; 10)$, $C_1(1; -1)$; b) $A_1(-1; 14)$, $B_1(-6; 12)$, $C_1(-11; 0)$; c) $A_1(-3; 9)$, $B_1(1; -4)$, $C_1(-14; 12)$. **3.** a) $x_1 = x+3$, $y_1 = y-3$; b) $x_1 = x-5$, $y_1 = y+4$; c) $x_1 = x+1$, $y_1 = y-6$. **4.** a) $M_1(-2; 7)$; b) $N_1(1; 4)$; c) $K_1(-2; 2)$; d) $P_1(-6; 10)$. **5.** a) $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{KC}$; b) $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{PD}$; c) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{EC}$; d) $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{EB}$. **8.** a) (3; 4); b) (5; 12); c) (11; 60); d) (35; 12). **9.** a) 5; b) 13; c) 61; d) 37. **10.** a) 13; b) 17; c) 25; d) 41. **11.** a) $A(-2; 9)$, $B(1; 8)$, $C(-3; 8)$; b) $A(1; 17)$, $B(6; 3)$, $C(4; 7)$; c) $A(-2; 4)$, $B(1; 15)$, $C(-11; 13)$. **12.** a) Există; b) nu există; c) există. **13.** a) $C(-2; 4)$; b) $C(2; -2)$; c) $C(4; -4)$. **14.** a) $m = 5$, $n = 3$; b) $m = -3$, $n = -2$; c) $m = 2$, $n = 11$. **15.** a) $(8; 8\sqrt{3})$; b) $(8\sqrt{3}; 8)$; c) $(8\sqrt{2}; 8\sqrt{2})$. **16.** a) $x_1 = x+a$, $y_1 = y-2$, unde $a \in \mathbb{R}$; b) $x_1 = x-6$, $y_1 = y+a$, unde $a \in \mathbb{R}$. **17.** a) $D(3; 4)$; b) $D(9; 7)$; c) $D(-15; -7)$. **18.** *Indicație*. Se demonstrează că $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

§2. **1.** a) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\vec{0}$. **2.** a) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$; c) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$. **3.** a) $(-2{,}2; -6+\sqrt{5})$; b) $(3{,}8; -6-\sqrt{5})$; c) $(-6; 2\sqrt{5})$; d) $(0{,}4; -3)$; e) $(-10{,}6; 3\sqrt{5}+12)$. **4.** a) $\left(12\frac{2}{3}; 7\right)$; b) $\left(11\frac{1}{3}; 25\right)$; c) (3; 4); d) (2; −27); e) (28; −22). **5.** a) $\sqrt{34}$; b) $\sqrt{41}$; c) $\sqrt{117}$; d) $7\sqrt{5}$. **9.** a) 5; b) 4; c) 9; d) 0. **10.** a) −3; b) 24; c) −9; d) −3. **11.** a) $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{DA}$. **12.** $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. **13.** a) (8; −1); b) (−5; −2); c) (−4; 5); d) (7; 18). **14.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **15.** 9. **16.** *Indicație*. Arătați că direcțiile vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt perpendiculare. **23.** a) $\vec{x}(1; 2)$, $\vec{y}(-3; 4)$; b) $\vec{x}(2; 3)$, $\vec{y}(5; -4)$; c) $\vec{x}(0; -1)$, $\vec{y}(6; -2)$.
25. $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$.

Exerciții și probleme recapitulative

4. a) 5; b) 6; c) 5; d) $2\sqrt{5}$. **6.** $D(3; 1)$. **7.** a) $\sqrt{2}$; b) 26; c) 15; d) 82. **9.** a) $A_1(4; 2)$; b) $B_1(3; 7)$; c) $C_1(-1; 5)$; d) $D_1(4; -4)$. **15.** a) 24; b) 7,5; c) 12; d) 6. **19.** a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) 7,5. **20.** b) 12. **21.** $C(2; 0)$. **22.** a) Isoscel; b) echilateral. **23.** a) Dreptunghi; b) paralelogram.

Cuprins